二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：ベクトル—位置ベクトルの考え方

統合教材

トピック: 位置ベクトルの定義、AB = b - a、点の位置を式で扱う難易度: 標準

問題

次の問いに答えよ。

(1) O を原点、A(2, 3)、B(-1, 5) とするとき、$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$ を位置ベクトルで表せ。また $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (0, 4)$ のとき、$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ の終点の座標と、その点が AB の中点でないことを確認せよ。

(3) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ のとき、点 P が線分 AB 上にある条件（位置ベクトルで表す）を述べよ。

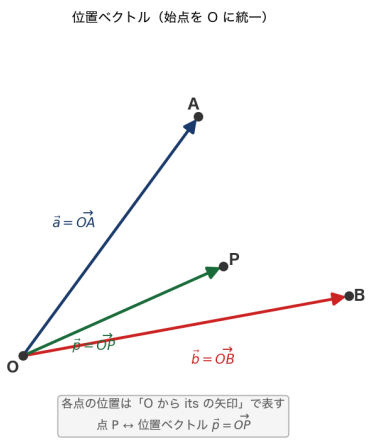
解法の流れ

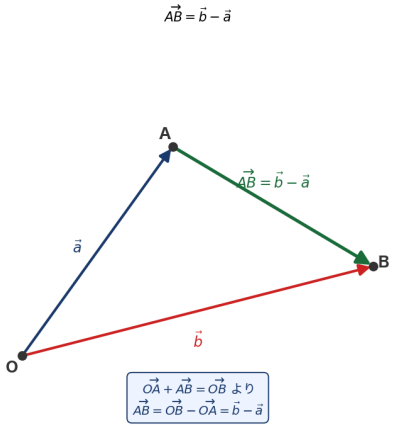
- 位置ベクトルは「O から各点への矢印」
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$
- P が AB 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$（$0 \leq t \leq 1$）

方針

位置ベクトルを使う利点は「点の位置を始点なしで扱える」こと。座標のペアと違い、ベクトルの演算（加減・実数倍）で点の位置関係を直接計算できる。

問 (3) では P が AB 上 $\leftrightarrow$ AP が AB の実数倍 $\leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ という条件から導く。





模範解答

(1) 位置ベクトルと $|AB|$

【$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ の根拠】
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ より

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

位置ベクトルの差 = 点から点への矢印
「終点の位置 − 始点の位置」
$\overrightarrow{AB}$ の成分 $= (-3, 2)$
✓（B の座標 − A の座標）

各位置ベクトル:

$$\overrightarrow{OA} = (2, 3), \quad \overrightarrow{OB} = (-1, 5)$$

$\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (-1 - 2,\ 5 - 3) = (-3,\ 2)$$

$|\overrightarrow{AB}|$:

$$= \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

(2) OA+OB の終点と AB の中点の比較

【よくある誤解】
$\vec{a}+\vec{b}$ は平行四辺形の対角線の終点
AB の中点は $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$（「平均の位置」）
違いを明確に:
$\vec{a}+\vec{b}$: O から $\vec{a}$ 進み $\vec{b}$ 進む
中点: A と B の「真ん中」の位置
$= \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$:

$$\vec{a}+\vec{b}=(2+0,\ 1+4)=(2,\ 5)$$

終点の座標: $(2,5)$
AB の中点 M:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=(1,\ \frac{5}{2})$$

$(2,5)\neq(1,5/2)$ なので AB の中点でない。

(3) P が線分 AB 上にある条件

【図で確認】
$t=0$: $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$（点 A）
$t=1$: $\overrightarrow{OP}=\vec{b}$（点 B）
$t=\frac{1}{2}$: $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$（中点）
直線 AB 全体: t が全実数
線分 AB のみ: $0\leq t\leq 1$
$(1-t)+t=1$ であり
係数の和が常に 1

P が AB 上にある
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（$0\leq t\leq 1$）
となる実数 t が存在する。
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$$=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

（$0\leq t\leq 1$）

統合教材：ベクトル—内分・外分

統合教材

トピック: 内分点の位置ベクトル公式、外分の符号、中点は内分の特殊ケース難易度: 標準

問題

次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (5, 4)$ とする。AB を 3:1 に内分する点 P と 3:1 に外分する点 Q の位置ベクトルを求め、それぞれの座標を求めよ。

(2) 三角形 OAB において $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。辺 AB を 2:1 に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (3, 0)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (0, 6)$ とする。AB の中点 M の座標を内分公式から求め、座標平面の中点公式の結果と一致することを確認せよ。

解法の流れ

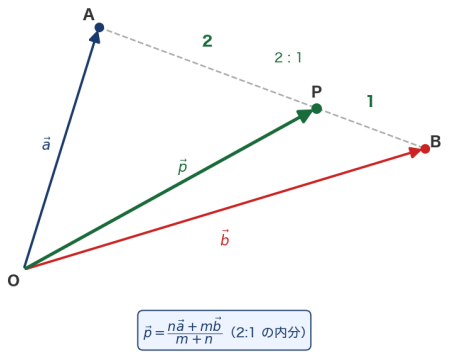
- 内分点 $m : n$: $\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$
- 外分点 $m : n$（$m \neq n$）: $\overrightarrow{OQ} = \frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$（符号に注意）
- 中点は $1 : 1$ の内分: $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$
- 公式の分子が「比で引き寄せられる重み付き平均」

方針

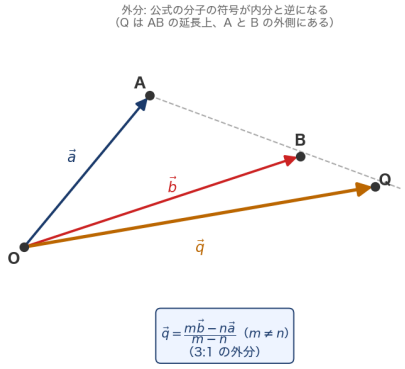
内分点の公式は「m:n に内分すると、B 側に m の重み、A 側に n の重みがかかる」という比例配分の考え方から導ける。

外分点は「B 側が m、A 側が −n」となることで公式の分子の符号が逆になる。

内分点の位置ベクトル



外分点の位置ベクトル



模範解答

(1) 3:1 の内分点 P と外分点 Q

【公式の根拠: 内分】
P が AB を $m:n=3:1$ に内分
→ AP : PB = 3 : 1
$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ より
$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\frac{3}{4}(\vec{b}-\vec{a})$

$$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

$$=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\quad\checkmark$$

外分は AB の延長上: Q は B より外側

内分点 P（3:1）:

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}}{3+1}$$

$$=\frac{(1,2)+3(5,4)}{4}$$

$$=\frac{(16,14)}{4}=(4,\ \frac{7}{2})$$

外分点 Q（3:1）:

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{-1\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}}{3-1}$$

$$=\frac{-(1,2)+3(5,4)}{2}$$

$$=\frac{(14,10)}{2}=(7,\ 5)$$

(2) AB を 2:1 に内分する点 P

【別解: 頭尾連結から】
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$
P は AB を 2:1 に内分なので
$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$
$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \quad \checkmark$$

A, B の位置ベクトルはそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$。
AB を 2:1 に内分する P:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{2 + 1}$$

$$= \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

(3) 中点 M の確認

【中点が内分の特殊ケース】
$m:n=1:1$ の内分点:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1+1}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

これは「2 点の位置ベクトルの平均」
座標での中点公式
$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ と完全に一致
ベクトル公式の方が統一的に扱える

内分公式（1:1）から:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{(3,0)+(0,6)}{2}$$

$$=\frac{(3,6)}{2}=\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$$

座標平面の中点公式:

$$M=\left(\frac{3+0}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$$

一致 ✓

統合教材：ベクトル—図形条件のベクトル式化

統合教材

トピック: 重心 =(a+b+c)/3 の理由、共線条件、平行条件を等式で書く難易度: 応用

問題

次の問いに答えよ。

(1) 三角形 OAB において $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (2, 0)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (0, 4)$ とする。重心 G の位置ベクトル（および座標）を求め、重心が 3 本の中線の交点であることを確認せよ。

(2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする。3 点 A, B, P が一直線上にある条件を、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 ABC において、辺 BC の中点を M、AM の中点を G とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、G の位置ベクトルを求めよ。

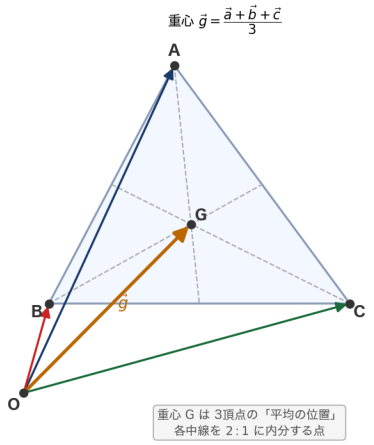
解法の流れ

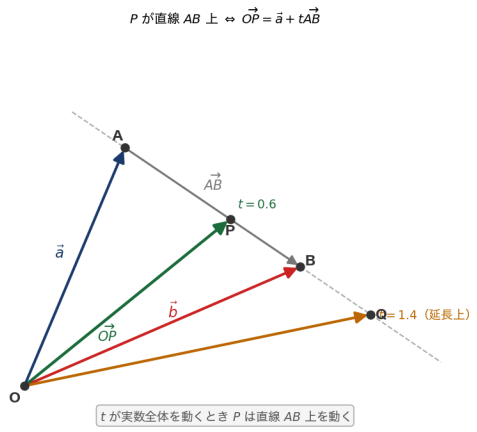
- 重心は「3 頂点の位置ベクトルの平均」: $\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$
- 共線条件: A, B, P が一直線 $\boxtimes$ $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t が存在
- 中線の交点を計算して重心と一致することを確認する

方針

重心は「各中線を 2:1 に内分する」という性質から位置ベクトルを求め、それが $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ になることを確認する。

問 (3) では「M は BC の中点、G は AM の中点」という条件を順にベクトルで書く。


重心 $\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$
A
G
B
C
O
$\vec{g}$
重心 G は 3頂点の「平均の位置」
各中線を 2 : 1 に内分する点


P が直線 AB 上 ⇔ $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\overrightarrow{AB}$
A
$\overrightarrow{AB}$
$t = 0.6$
P
B
$\vec{a}$
$\vec{b}$
$\overrightarrow{OP}$
O
Q
$= 1.4$（延長上）
t が実数全体を動くとき P は直線 AB 上を動く

模範解答

(1) 重心 G の位置ベクトル

【重心が平均になる理由】
BC の中点 M: $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$
G は AM を 2:1 に内分:
$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a}+2\cdot\overrightarrow{OM}}{3}$

$$= \frac{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}{3}$$

$$= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

3 頂点の位置の「平均」
どの中線を使っても同じ点

重心の公式:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

（ここで O を頂点とする三角形なので $\vec{c} = \vec{0}$）

$$\overrightarrow{OG} = \frac{(2,0)+(0,4)+(0,0)}{3} = \left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

確認—BC の中点 M:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{b}+\vec{0}}{2} = \frac{(0,4)}{2} = (0,\ 2)$$

AM を 2:1 に内分する点:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1\cdot\vec{a}+2\cdot\overrightarrow{OM}}{3}$$

$$= \frac{(2,0)+2(0,2)}{3} = \frac{(2,4)}{3} = \left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right) \quad \checkmark$$

(2) A, B, P が一直線上にある条件

【なぜ実数倍で書けるか】
P が直線 AB 上 ☒
AP と AB が平行（同じ直線上）
同方向の非零ベクトルは
互いに実数倍の関係
☒ $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$（$t$ は実数）
【係数の和が 1】
$(1-t)+t=1$
直線 AB 上の点は係数の和が常に 1
（アフィン結合の特徴）

A, B, P が一直線上にある
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t が存在する
$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$
$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
よって条件は:

$$\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

（t は任意の実数）

(3) AM の中点 G の位置ベクトル

【重心と AM の中点の違い】
重心 = AM を 2:1 に内分する点
AM の中点 = AM を 1:1 に内分する点
重心:
$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a}+2\overrightarrow{OM}}{3}$

$$= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

AM の中点:
$\frac{\vec{a}+\overrightarrow{OM}}{2} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$
→ 別の点

BC の中点 M:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

AM の中点 G:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}}{2}$$

$$= \frac{\vec{a}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{2}$$

$$= \frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

これは重心（$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$）と**一致しない**。
G は AM の中点（2:1 内分点でなく中点）なので重心ではない。