二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：ベクトル—ベクトルとは何か

統合教材

トピック: 向きと大きさをもつ量、ベクトルの相等、零ベクトルと逆ベクトル難易度: 基礎

問題

次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 ABCD において、$\overrightarrow{AB}$ と等しいベクトルをすべて答えよ。また $\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルを答えよ。

(2) 点 O, A, B, C, D について、$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ が成り立っているとする。このとき四角形 OACB はどのような図形か。

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ とする。$\vec{a} = -2\vec{c}$, $\vec{b} = ?$ を求めよ。

解法の流れ

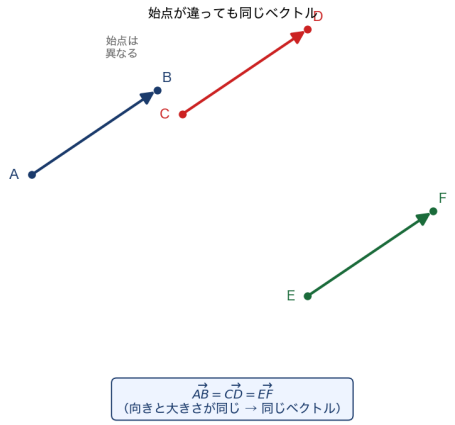
- ベクトルの相等は「向きと大きさが一致するか」で判定する（始点の位置は無関係）
- 平行四辺形では対辺が平行で等しいという性質を使う
- $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ は「O から A への移動」と「C から B への移動」が同じことを意味する
- $\vec{0}$ は大きさが 0 のベクトル（始点と終点が一致）

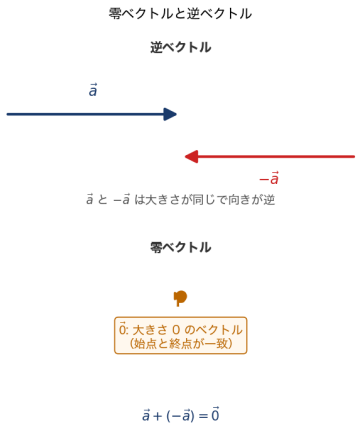
方針

ベクトルの相等の定義（「向きと大きさが同じ」）を図で確認してから計算に移る。

平行四辺形 ABCD では、対辺が平行で長さが等しいため $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$（向きに注意）。

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ という条件は「OA と CB が平行・等長かつ同向き」を意味するので、四角形の形状が決まる。





模範解答

(1) 平行四辺形 ABCD のベクトル相等

【ベクトルの相等の確認】
向き・大きさが一致 → 同じベクトル
始点の位置は関係ない
平行四辺形 ABCD:
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ かつ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$
$\rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ✓
注意: $\overrightarrow{CD}$ は方向が逆

平行四辺形の性質より、対辺は平行で長さが等しい。

$\overrightarrow{AB}$ と向き・大きさが同じベクトル:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

（AB と DC は平行で等長、かつ同じ向き）

逆ベクトル（向きが逆）:

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

(2) OA = CB のとき OACB の形状

【図で確認】
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ の意味:
O から A へ動く矢印と
C から B へ動く矢印が同じ
→ OA ∥ CB かつ OA = CB
→ OACB は平行四辺形
頂点の順序に注意: OABC ではなく OACB

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ が成り立つ。
「OA の移動量」と「CB の移動量」が等しいということは、
OA と CB が**平行・等長・同向き**。
よって四角形 OACB（頂点の順に注意）は
平行四辺形。

(3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\vec{a} = -2\vec{c}$ から $\vec{b}$ を求める

【零ベクトルの扱い】
$\vec{0}$ は大きさが 0 のベクトル
通常の数と同様に
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
$-\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$
【確認】
$\vec{b} = \vec{c}$ を元の式に代入:
$-2\vec{c} + \vec{c} + \vec{c}$

$$= (-2 + 1 + 1)\vec{c} = \vec{0} \quad \checkmark$$

条件: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$
$\vec{a} = -2\vec{c}$ を代入:

$$-2\vec{c} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{b} = \vec{c}$$

統合教材：ベクトル—加法と減法

統合教材

トピック: 頭尾連結による加法、OB - OA = AB の意味、平行四辺形則難易度: 基礎

問題

次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 4)$ のとき、$\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ を求めよ。

(2) 三角形 OAB において、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、辺 AB の中点 M の位置ベクトル $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ。

(3) 点 A, B, C, D について $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ が成り立つとき、D と A の関係を述べよ。

解法の流れ

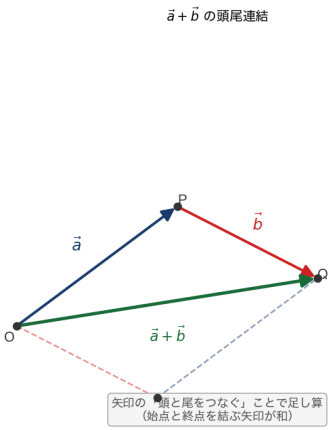
- 成分表示のベクトルの加減は成分ごとに計算する
- 中点の位置ベクトルは「A と B の中間」として $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ になる
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$（頭尾連結）を繰り返し適用する

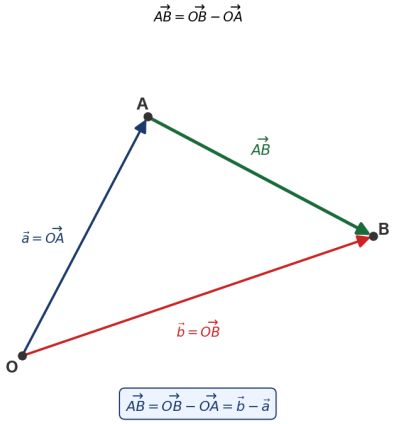
方針

頭尾連結の意味を確認する: 矢印の「先端（頭)」と次の矢印の「始点（尾)」をつなぐことで、移動を合成できる。

中点 M は「AM = MB」なので $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ と書け、さらに $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ を代入すると整理できる。

問 (3) では頭尾連結を 3 回適用すると始点に戻ることが分かる。





模範解答

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$

【成分演算の根拠】
$\vec{a}+\vec{b}$ は x 成分同士・y 成分同士を足す
これは頭尾連結と一致する
（x 方向に a_1 動いて b_1 動く）
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$
$-\vec{b}=(1,-4)$（符号反転）

加法:

$$\vec{a}+\vec{b}=(3+(-1),\ 1+4)=(2,\ 5)$$

減法（$-\vec{b}$ を加える）:

$$\vec{a}-\vec{b}=(3-(-1),\ 1-4)=(4,\ -3)$$

(2) 中点 M の位置ベクトル

【$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ の意味】
O から A へ → O から B へ
A から B への移動 =
(O から B への移動)
− (O から A への移動)
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ より

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

M は AB の中点なので $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$。
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

(3) 3 つのベクトルの和が零ベクトルのとき

【確認】
$\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ とは
始点 A と終点 D が一致すること
別の見方:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
（閉じた多角形では常に成立）
今回は $\overrightarrow{DA} = \vec{0}$
つまり $D = A$ ✓

頭尾連結を適用する:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

さらに:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

よって

$$\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

これは D = A を意味する。
（A から D への移動量が 0 → 同じ点）

統合教材：ベクトル—実数倍と平行

統合教材

トピック: 実数倍の幾何的意味、平行条件、零ベクトルの除外理由難易度: 基礎

問題

次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = (2, -3)$ のとき、$3\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$ を成分で求め、それぞれの向きと大きさの変化を述べよ。

(2) 2 つの非零ベクトル $\vec{a} = (1, 2)$ と $\vec{b} = (3, k)$ が平行であるとき、k の値を求めよ。

(3) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき、$\vec{a} + \vec{b}$ が $\vec{a}$ と平行ならば $\vec{b}$ は $\vec{a}$ と平行であることを示せ。

解法の流れ

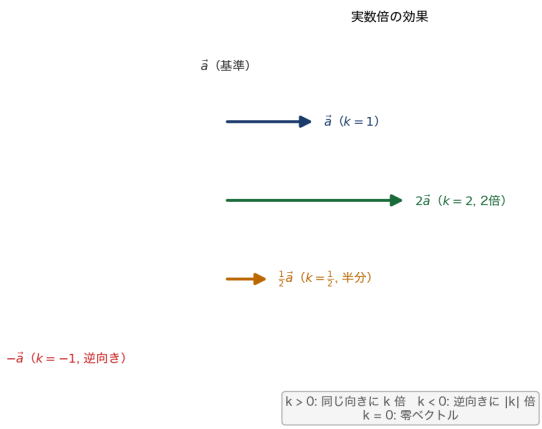
- 実数倍 $k\vec{a}$ は、$k > 0$ なら同じ向きに $|k|$ 倍、$k < 0$ なら逆向きに $|k|$ 倍
- 非零ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行 $\Leftrightarrow$ $\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在する
- 成分表示では「平行 $\Leftrightarrow$ 成分の比が等しい」($a_1 b_2 = a_2 b_1$)
- 零ベクトルは向きが定義できないため平行条件から除外する

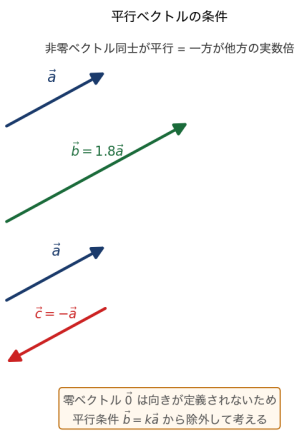
方針

非零ベクトル同士の平行条件は $\vec{b} = k\vec{a}$ と表せる。

成分で書くと $(b_1, b_2) = k(a_1, a_2)$ なので $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2$、すなわち $a_1 b_2 = a_2 b_1$。

問 (3) は $\vec{a} + \vec{b} = m\vec{a}$ とおき、$\vec{b}$ を整理する方針で示す。





模範解答

(1) $\vec{a} = (2, -3)$ の実数倍

【実数倍の意味】
$k > 0$: 同じ向きに k 倍
$k < 0$: 逆向きに $|k|$ 倍
$k = 0$: 零ベクトル $\vec{0}$
大きさは常に $|k|$ 倍:
$|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$
$3|\vec{a}| = 3\sqrt{4+9} = 3\sqrt{13}$
$|-2\vec{a}| = 2\sqrt{13}$

$3\vec{a}$（$k = 3 > 0$）：

$$3\vec{a} = (6,\ -9)$$

同じ向き、大きさ 3 倍
$-2\vec{a}$（$k = -2 < 0$）：

$$-2\vec{a} = (-4,\ 6)$$

逆向き、大きさ 2 倍
$\frac{1}{2}\vec{a}$（$k = \frac{1}{2} > 0$）：

$$\frac{1}{2}\vec{a} = (1,\ -\frac{3}{2})$$

同じ向き、大きさ $\frac{1}{2}$ 倍

(2) $\vec{a}=(1,2)$ と $\vec{b}=(3,k)$ が平行のとき k を求める

【平行条件の別表現】
$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ が平行
$\Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$
確認: $1\cdot k-2\cdot 3=0$

$$k=6 \quad \checkmark$$

零ベクトルを除く理由:
$\vec{0}$ は向きが未定義であり
平行・垂直の概念が適用できない

非零ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ が平行
$\Leftrightarrow \vec{b}=t\vec{a}$ となる実数 t が存在する
$(3,k)=t(1,2)$ とおくと
$t=3$ かつ $k=2t=6$
(成分の比から: $\frac{3}{1}=\frac{k}{2}\to k=6$)

(3) $\vec{a}+\vec{b}$ が $\vec{a}$ と平行ならば $\vec{b}$ は $\vec{a}$ と平行

【注意】
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ の場合:
$\vec{b}=-\vec{a}$ となり、
これも $\vec{a}$ の実数倍（$k=-1$）
よって平行条件を満たす
【確認】
$(m-1)\vec{a}$ が $\vec{a}$ の実数倍
$\to \vec{b}\parallel\vec{a}$ ✓
($m=1$ のとき $\vec{b}=\vec{0}$、
この場合は除いて考える)

$\vec{a}+\vec{b}$ が非零で $\vec{a}$ と平行と仮定する。
すると実数 m が存在して

$$\vec{a}+\vec{b}=m\vec{a}$$

$$\vec{b}=m\vec{a}-\vec{a}=(m-1)\vec{a}$$

よって $\vec{b}$ は $\vec{a}$ の実数倍であり、
$\vec{b}$ は $\vec{a}$ と平行。(証明完了)