二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：三角関数の相互関係

統合教材

トピック: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を使って sin, cos, tan を求める難易度: 標準

問題

$\sin\theta = 3/5$、$0 < \theta < \pi/2$ のとき、$\cos\theta$ と $\tan\theta$ を求めよ。

解法の流れ

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を計算する
- $0 < \theta < \pi/2$ より $\cos\theta > 0$ を使って正の平方根をとる
- $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$ で求める

方針

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ は単位円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ から直接導かれる。sin の値が分かれば cos の値は（符号に注意して）求められる。

模範解答

【$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の由来】
単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を代入すると $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ が成り立つ。これが相互関係の根本。

【cos の符号の決め方】
$\cos^2\theta = \dfrac{16}{25}$ から $\cos\theta = \pm\dfrac{4}{5}$ の 2 つの候補がある。「$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$（第 1 象限）」という条件から $\cos\theta > 0$ と確定。象限の条件がなければ符号を仮定して場合分けが必要。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より、

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta > 0$ なので、

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

したがって、

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

統合教材：三角関数の対称性・補角・余角

統合教材

トピック: $\pi - \theta$, $\pi + \theta$, $-\theta$ の変換公式難易度: 標準

問題

次の式を θ の三角関数で表せ。

(1) $\sin(\pi - \theta)$、$\cos(\pi - \theta)$、$\tan(\pi - \theta)$

(2) $\sin(\pi + \theta)$、$\cos(\pi + \theta)$

(3) $\sin(-\theta)$、$\cos(-\theta)$

解法の流れ

- 単位円上で $\theta \to \pi - \theta$ の変換がどの対称移動に対応するかを確認する
- x 座標（cos）と y 座標（sin）の符号の変化を読む

方針

単位円で θ の点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ を書き、$\pi - \theta$、$\pi + \theta$、$-\theta$ に対応する点の座標を読む。

模範解答

【単位円での対称移動の読み方】
θ の点 P は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$。

- $\pi-\theta$: y 軸で折り返す → x が −、y がそのまま

→ $(-\cos\theta,\ \sin\theta)$

- $\pi+\theta$: 原点で点対称 → x も y も −

→ $(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$

- $-\theta$: x 軸で折り返す → x がそのまま、y が −

→ $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$

これらを読めば公式を丸暗記しなくてよい。

(1) π - θ （y 軸対称）

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

(2) π + θ （原点対称）

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

(3) - θ （x 軸対称）

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

統合教材：周期と一般角

統合教材

トピック: 三角方程式の解を一般角で表す難易度: 標準

問題

(1) $\sin\ \theta\ =\ 1/2$ となる θ をすべて求めよ（一般角で表せ)。
(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ をすべて求めよ。

解法の流れ

- まず $[0,\ 2\pi)$ での基本解を求める
- sin（または cos）の周期 2π を加えて一般角で表す
- $\sin\ \theta\ = k$ の解が $\theta\ =\ \alpha$ のとき、もう 1 つの解は $\theta\ =\ \pi\ -\ \alpha$

方針

sin の周期は 2π なので、1 つの解を見つけたら $2n\pi$ を加えればすべての解になる。sin は $[0,\ 2\pi)$ で 2 つの解を持つことが多い（$k = \pm 1$ を除く)。

模範解答

(1) sin θ = 1/2

【一般角が必要な理由】
三角関数は周期的なので、$\sin\theta = k$ を満たす θ は無限個ある。「一般角」はこれをまとめて表す記法。
sin については対称性 $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$ から、$[0, 2\pi)$ の解の 1 つを α とすると、もう 1 つは π - α。

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となる基本角: $\theta = \dfrac{\pi}{6}$
$[0, 2\pi)$ での解: $\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}$
$\left(\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\right.$ を確認)
一般角:

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【cos の対称性】
cos については対称性 $\cos\theta = \cos(-\theta)$ から、解の組は $\pm\alpha + 2n\pi$ の形になる。
$\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ かつ $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両方が $[0, 2\pi)$ に含まれる。

基本角: $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$[0, 2\pi)$ での解: $\theta = \dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}$
一般角:

$$\theta = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$