二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：基本的な三角不等式

統合教材

トピック: $\sin\theta \geq k$, $\cos\theta \leq k$ の解の読み方難易度: 標準

問題

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。
(1) $\sin\theta \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(2) cos θ < -1/2

解法の流れ

- y = sin θ（または cos θ）のグラフを描き、水平線 y = k を引く
- $\sin\theta \geq k$ は「グラフが水平線以上の部分」の θ の範囲
- 境界点（等号成立点）を求めてから範囲を確定する

方針

不等式はグラフから「どの θ の区間でグラフが水平線の上（または下）にあるか」を読むだけで解ける。等号の有無（≥ か > か）で境界点を含むか含まないかが決まる。

模範解答

(1) $\sin\theta \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【不等式の解をグラフで確認する】
(1) sin θ は $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ を経て $\dfrac{2\pi}{3}$ まで $y \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を保つ。$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1 を取り、両端で $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ になる（境界点を含む）。

境界点: $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to \theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}$
sin グラフが $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 以上になる区間を読む。

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

(2) cos θ < -1/2

【境界点の扱い】
$\geq$ なら等号を含む（閉区間 [ ]）。$>$ や $<$ なら等号を含まない（開区間 ( )）。水平線との交点（境界点）で等号が成立する。(2) cos θ < -1/2 は cos グラフが水平線 $y = -\dfrac{1}{2}$ より下の区間。$\theta \in \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ の間、cos は $-\dfrac{1}{2}$ より小さい。$\theta = \pi$ で最小値 -1 を取る。

境界点: $\cos\theta = -\dfrac{1}{2} \to \theta = \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$
cos グラフが $y = -\dfrac{1}{2}$ より下の区間を読む。

$$\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}$$

（境界点は含まない）

統合教材：合成を使う三角不等式

統合教材

トピック: $\sin\theta - \cos\theta \geq 1$ を合成して解く難易度: 応用

問題

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、$\sin\theta - \cos\theta \geq 1$ を解け。

解法の流れ

- 左辺を合成: $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta - \pi/4)$
- $\sqrt{2}\sin(\theta - \pi/4) \geq 1$、つまり $\sin(\theta - \pi/4) \geq 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ を解く
- $\phi = \theta - \pi/4$ の範囲を確認して不等式の ϕ の解を求め、θ に戻す

方針

左辺が $a \sin\theta + b \cos\theta$ の形なら合成で 1 つの sin 不等式に帰着できる。合成後は $\sin(\theta - \pi/4) \geq \sqrt{2}/2$ という基本不等式を解くだけ。

模範解答

【合成の ϕ の取り方】
$a\sin\theta + b\cos\theta$ で $b = -1 < 0$ のとき、$R\cos\varphi = 1,\ R\sin\varphi = -1$ より $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$（第 4 象限）。よって

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

【不等式の解の確認】
$\theta = \dfrac{\pi}{2}$: $\sin\dfrac{\pi}{2} - \cos\dfrac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1 \geq 1$ ✓（境界）
$\theta = \pi$: $\sin\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1 \geq 1$ ✓（境界）
$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > 1$ ✓（内部）

左辺を合成する。$R = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

不等式は、

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1 \implies \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7\pi}{4}$
この範囲で $\sin\varphi \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$（$\varphi = \theta - \dfrac{\pi}{4}$）を解く。

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$$

$\theta - \dfrac{\pi}{4} = \varphi$ に戻すと、

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \implies \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

統合教材：三角不等式の解（置換と sin グラフ読み）

統合教材

トピック: 三角不等式（置換して二次不等式に帰着）難易度: 標準

問題

次の不等式を解け。

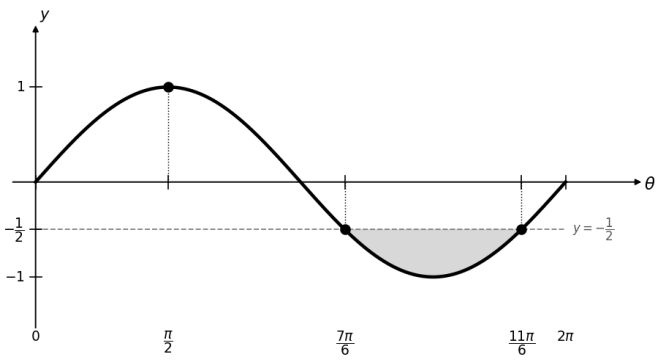
$$2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

解法の流れ

- $\sin\theta = t$ と置換し、t の定義域 $-1 \leq t \leq 1$ を確認する
- $2t^2 - t - 1$ を因数分解して不等式 $(t-1)(2t+1) \geq 0$ を解く
- t の定義域 $-1 \leq t \leq 1$ との共通部分をとる
- t の結果を $\sin\theta$ に戻し、sin グラフから θ の範囲を読む

方針

$\sin\theta$ のままでは代数処理が困難なため、$t = \sin\theta$ と置換して二次不等式に帰着させる。置換後は定義域 $-1 \leq t \leq 1$ との共通部分をとり、最後に sin グラフから θ の範囲を読んで解を確定する。



模範解答

【置換する理由】
$\sin\theta$ という複合構造を単一変数 t に変換する。$0 \leq \theta \leq 2\pi$ での $\sin\theta$ の値域は $-1 \leq t \leq 1$ であり、この制約が後の「共通部分をとる」操作の根拠になる。

$\sin\theta = t$ とおくと、$0 \leq \theta \leq 2\pi$ より $-1 \leq t \leq 1$ である。
不等式は、

$$2t^2 - t - 1 \geq 0$$

【積の符号の判断】
$(t-1)(2t+1) \geq 0$ の解は両因子が同符号の範囲：$t \geq 1$ または $t \leq -\dfrac{1}{2}$。定義域 $-1 \leq t \leq 1$ との共通部分で $t \geq 1$ は $t = 1$ のみに絞られる。

$2t^2 - t - 1 = (t-1)(2t+1)$ であるから、

$$(t-1)(2t+1) \geq 0 \Longleftrightarrow t \leq -\frac{1}{2} \text{ または} t \geq 1$$

$-1 \leq t \leq 1$ との共通部分をとって、

$$-1 \leq t \leq -\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad t = 1$$

【sin グラフから θ を読む】
$y = \sin\theta$ と直線 $y = -\dfrac{1}{2}$ の交点が $\theta = \dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{6}$。$\sin\theta \leq -\dfrac{1}{2}$ は sin 曲線が直線より下にある区間がそのまま解。$\sin\theta = 1$ は $[0, 2\pi]$ で $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のみ（最大値は 1 点）。

$\sin\theta = t$ に戻すと、
$\sin\theta = 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{2}$
$-1 \leq \sin\theta \leq -\dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{11\pi}{6}$
したがって、

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{または} \quad \frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$$