二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：三角関数の定義（単位円）

統合教材

トピック: 単位円を使った sin, cos, tan の定義と主要角の値難易度: 基本

問題

単位円（半径 1 の円、原点中心）上の点 P を使って $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を定義し、$\theta = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi$ の値を求めよ。

解法の流れ

- 単位円上の点 P(x, y) において $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$ と定義する
- $\tan\theta = y/x = \sin\theta / \cos\theta$ と定義する（$x \neq 0$）
- 代表角の座標を覚えるか、直角三角形の辺比（$1:1:\sqrt{2}$、$1:2:\sqrt{3}$）から導く

方針

単位円を使うと、$\sin\theta$ は y 座標、$\cos\theta$ は x 座標として直接読める。$\tan\theta$ は原点と P を結ぶ直線の傾きを表す。

模範解答

> **【単位円で読む理由】**
> 単位円では半径 = 1 なので、P(x, y) の x 座標が $\cos\theta$、y 座標が $\sin\theta$ に直接対応する。角 θ を媒介変数にすることで、
>
> $$\sin^2\theta + \cos^2\theta = x^2 + y^2 = 1$$
>
> が自動的に成立する。

定義（単位円: $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P(x, y)）：

$$\sin\theta = y, \quad \cos\theta = x, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

$\boldsymbol{\theta}$	**0**	$\boldsymbol{\pi/6}$	$\boldsymbol{\pi/4}$	$\boldsymbol{\pi/3}$	$\boldsymbol{\pi/2}$
sin θ	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	定義なし

> **【第 2 象限での符号変化】**
> $\theta \in (\pi/2,\ \pi)$ では P(x, y) の x < 0 なので $\cos\theta < 0$、y > 0 なので $\sin\theta > 0$。よって $\tan\theta = y/x < 0$。単位円上の位置から符号が決まる。

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{2\pi/3}$	$\boldsymbol{3\pi/4}$	$\boldsymbol{5\pi/6}$	$\boldsymbol{\pi}$
sin θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0
cos θ	-1/2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan θ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

 統合教材

統合教材：三角関数のグラフの形

統合教材

トピック: y = sin θ, y = cos θ, y = tan θ の周期・振幅・特徴点難易度: 基本

問題

次の関数の周期・振幅・特徴的な性質を求め、$0 \leq \theta \leq 2\pi$ のグラフを描け。
(1) y = sin θ　(2) y = cos θ　(3) y = tan θ

解法の流れ

- sin と cos は周期 2π、振幅 1、y 値の範囲 $-1 \leq y \leq 1$
- tan は周期 π、x = π/2 + nπ で漸近線
- グラフは単位円の x または y 座標の θ に対する変化を追うことで得られる

方針

単位円を回転させながら「y 座標がどう変わるか」を追えば sin グラフになる。cos は sin を π/2 だけ左に移動したグラフと一致する（sin と cos の位相差）。

模範解答

(1) y = sin θ

【sin はなぜ波になるか】
単位円を反時計回りに回るとき、点の y 座標が 0→1→0→-1→0 と変化する。これをそのまま横に展開したグラフが sin 曲線（サイン波）になる。

- 周期: 2π
- 振幅: 1（値域: $-1 \leq y \leq 1$）
- 特徴点: $(0,\ 0)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$, $(\pi,\ 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right)$, $(2\pi,\ 0)$
- 奇関数: $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

(2) y = cos θ

【cos は sin の位相シフト】
$\cos\theta$ は sin グラフを左に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフと一致する。これは

$$\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

という恒等式から来ている。

- 周期: 2π
- 振幅: 1（値域: $-1 \leq y \leq 1$）
- 特徴点: $(0,\ 1)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $(\pi,\ -1)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$, $(2\pi,\ 1)$
- 偶関数: $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

(3) y = tan θ

【tan の漸近線の理由】
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので、$\cos\theta = 0$（すなわち $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$）では定義されない。$\theta \to \frac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta \to +\infty$ となり、グラフは垂直漸近線を持つ。

- 周期: π
- 漸近線: $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$（n は整数）
- 値域: すべての実数
- 奇関数: $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

統合教材：三角関数のグラフ変換

統合教材

トピック: y = A sin(Bθ + C) + D の振幅・周期・位相・垂直移動難易度: 標準

問題

次のグラフの振幅・周期・位相のずれ・垂直移動を求め、グラフを描け。
(1) y = 3 sin 2θ
(2) y = -2 cos(θ - π/3) + 1

解法の流れ

- 振幅 = |A|（グラフの上下の最大幅の半分）
- 周期 = 2π/|B|
- 位相のずれ: Bθ + C = 0 → θ = -C/B（グラフが基準点から何だけずれるか）
- 垂直移動: D（グラフ全体を上下にシフト）

方針

y = A sin(Bθ + C) + D は y = sin θ に対して 4 種類の変換を組み合わせたもの。各パラメータの意味を分離して読む。

模範解答

(1) y = 3 sin 2θ

【振幅と周期の意味】
振幅 3 はグラフが -3 から 3 の範囲を振れることを意味する。周期 π は 2π の区間に sin の波が 2 つ入ることを意味する（元の 2 倍速）。

$A = 3,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 0$

- 振幅: $|A| = 3$
- 周期: $\dfrac{2\pi}{|B|} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$
- 位相のずれ: なし
- 値域: $-3 \leq y \leq 3$

 統合教材

(2) y = -2 cos(θ - π/3) + 1

【A < 0 の効果】
$A = -2$ は cos グラフを上下に反転させ、かつ振幅を 2 にする。通常 cos は $\theta = 0$ で最大値($= 1$)を取るが、$A = -2$ なら $\theta = 0$ で最小値(中心から 2 下)となる。$D = 1$ の垂直移動と合わせて最小値は $1 - 2 = -1$ になる。

$$A = -2,\ B = 1,\ C = -\frac{\pi}{3},\ D = 1$$

- 振幅: $|-2| = 2$
- 周期: $\dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$
- 位相のずれ: $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ だけ右にずれる(cos の最大点が $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ に)
- 垂直移動: $D = 1$(中心線が $y = 1$)
- $A < 0$ なので上下反転(最大値 $1+2 = 3$、最小値 $1 - 2 = -1$)

したがって値域: $-1 \leq y \leq 3$