二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：基本的な三角方程式

統合教材

トピック: sin θ = k, cos θ = k の形の方程式をグラフから解く難易度: 基本

問題

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

解法の流れ

- y = sin θ（または cos θ）のグラフに水平線 y = k を引く
- $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で交点の θ を読む
- sin: 基準角 α に対して θ = α と θ = π - α の２解
- cos: 基準角 α に対して θ = α と θ = ２π - α（または -α）の２解

方針

三角方程式の解法の核心は「sin グラフ（または cos グラフ）に水平線を引いて交点を読む」こと。グラフの対称性から解の組が自動的に決まる。

模範解答

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【グラフから解を読む手順】
1. y = sin θ（または cos θ）を描く 2. 水平線 y = k を引く 3. 交点の x 座標が解
sin グラフは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ を軸に対称なので、解の 1 つが $\theta = \alpha$ なら、もう 1 つは $\theta = \pi - \alpha$。

基準角: $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より基準角は $\dfrac{\pi}{3}$
$[0, 2\pi)$ での解: sin グラフは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 周りに対称なので、

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

(2) cos θ = -1/2

【cos グラフの対称性】
cos グラフは $\theta = 0$（と $\theta = 2\pi$）を軸に対称なので、解の 1 つが $\theta = \beta$ なら、もう 1 つは $\theta = -\beta$（$= 2\pi - \beta$）。これを覚えていると、解の候補が公式なしに決まる。

基準角: $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ より $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ → 基準角は $\dfrac{2\pi}{3}$
cos グラフは $\theta = \pi$（および $\theta = 0, 2\pi$）周りに対称なので、

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

統合教材：合成を使う三角方程式

統合教材

トピック: a $\sin\theta$ + b $\cos\theta$ = c の形を合成してから解く難易度: 標準

問題

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 1$ を解け。

解法の流れ

- 左辺を合成: $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta + \pi/3)$
- $2\sin(\theta + \pi/3) = 1$、つまり $\sin(\theta + \pi/3) = 1/2$ を解く
- $\phi = \theta + \pi/3$ とおいて ϕ の方程式を解き、θ に戻す

方針

a $\sin\theta$ + b $\cos\theta$ = c を直接解くのは難しいが、左辺を合成で R $\sin(\theta + \phi)$ にまとめてしまえば $\sin(\theta + \phi) = c/R$ という基本方程式に帰着できる。

模範解答

【ϕ の範囲のとり方】
$\theta \in [0, 2\pi)$ から $\theta + \dfrac{\pi}{3}$ の範囲は $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}\right)$。
この範囲で $\sin = \dfrac{1}{2}$ を満たす角を全部探す:

- $\dfrac{\pi}{6}$：この範囲外（$\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{3}$ なので）→ 不採用
- $\dfrac{5\pi}{6}$：範囲内 → 採用
- $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6}$：$\dfrac{13\pi}{6} < \dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{14\pi}{6}$ → 採用

「範囲を必ず確認してから採否を決める」ことが合成を使う方程式の要点。

左辺を合成する。$R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

方程式は、

$$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \implies \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より $\dfrac{\pi}{3} \leq \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7\pi}{3}$
$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ の解（この範囲内）：

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{または} \quad \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$$

（注: $\dfrac{\pi}{6}$ はこの範囲内にない）
よって、

$$\theta = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \quad \text{または} \quad \theta = \frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

統合教材：置換を使う三角方程式

統合教材

トピック: 三角関数を t と置換して二次方程式に帰着させる難易度: 標準

問題

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ を解け。

解法の流れ

- t = cos θ とおいて二次方程式 $2t^2$ - t - 1 = 0 を解く
- t の値域 $-1 \leq t \leq 1$ との共通部分をとる
- cos θ = t の各値から θ を求める

方針

三角関数の式が二次式になっている場合、置換すれば代数的に解ける。置換後に t の定義域（cos θ なら $-1 \leq t \leq 1$）を必ず確認する。

模範解答

【置換する理由】
$2\cos^2\theta$ - $\cos\ \theta$ - 1 は $\cos\ \theta$ の二次多項式。t = $\cos\ \theta$ と置換すると $2t^2-t-1$ という普通の二次方程式になり、因数分解できる。
【定義域の確認が必要な理由】
t の解が $-1 \leq t \leq 1$ の外にある場合（例: t = 2）は、$\cos\ \theta$ = 2 を満たす実数 θ が存在しないため棄却しなければならない。今回は両方の解が定義域内なので全部採用できる。

$t = \cos\theta$ とおくと、$-1 \leq t \leq 1$
方程式は、

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$(t-1)(2t+1) = 0 \implies t = 1 \quad \text{または} \quad t = -\frac{1}{2}$$

どちらも $-1 \leq t \leq 1$ を満たす。
$\cos\theta = 1$: $\theta = 0$
$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$: $\theta = \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$
したがって、

$$\boxed{\theta = 0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}}$$