二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：加法定理の使い方

統合教材

トピック: 加法定理を使って三角関数の値を求める難易度: 標準

問題

次の値を求めよ。
(1) sin 75° = sin(45° + 30°)
(2) cos 15° = cos(45° - 30°)
(3) tan 105° = tan(60° + 45°)

解法の流れ

- 加法定理を書き下す: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$
- 既知の角（30°, 45°, 60°）に分解して代入する
- 有理化して簡単にする

方針

sin 75° など「30°, 45°, 60° の和差」で表せる角は加法定理で求められる。既知の代表角の値（sin 30° = 1/2 など）を組み合わせて計算する。

模範解答

【加法定理のポイント】
$\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$（これは誤り！）。積の形で足し算になる（クロス型）。
(1) $\sin 75^\circ$: 45° と 30° はどちらも代表角。$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$、$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$、$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を代入。
(3) $\tan\ 105^\circ$ の有理化: $\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ の分子・分母に $(1+\sqrt{3})$ を掛けると

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -(2+\sqrt{3})$$

加法定理（公式）：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

(1) sin 75°:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) cos 15°:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) tan 105°:

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3})$$

統合教材：倍角公式・半角公式

統合教材

トピック: 倍角公式を使って $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を求める難易度: 標準

問題

$\sin\theta = 2/3$、$\pi/2 < \theta < \pi$ のとき、$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を求めよ。

解法の流れ

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ と $\pi/2 < \theta < \pi$ より $\cos\theta$ を求める
- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を計算する
- $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$（または $\cos^2\theta - \sin^2\theta$）を計算する

方針

倍角公式は加法定理の $\alpha = \beta = \theta$ の特殊ケース。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が分かれば機械的に計算できる。$\cos\theta$ の符号は象限（$\pi/2 < \theta < \pi$ → 第２象限 → $\cos\theta < 0$）から決まる。

模範解答

【倍角公式の出典】
加法定理 $\sin(\alpha+\beta)$ で $\alpha=\beta=\theta$ とすると:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$\cos\ 2\theta$ の 3 つの表現は互いに等価 ($\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を使って変形できる)。

【$\sin\ 2\theta$ の符号の確認】
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ なら $\pi<2\theta<2\pi$ なので、2θ は第 3・4 象限。$\sin 2\theta<0$ になるのは $2\theta\in(\pi,2\pi)$ のときなので矛盾なし。

まず $\cos\ \theta$ を求める。

$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より $\cos\theta<0$ なので、

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\sin\ 2\theta$:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$\cos\ 2\theta$:

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\cdot\frac{4}{9} = 1-\frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

統合教材：三角関数の合成

統合教材

トピック: a sin θ + b cos θ を R sin(θ + ϕ) の形に変換する難易度: 標準

問題

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ を $R\sin(\theta+\varphi)$ の形に変換し、$0 \leq \theta < 2\pi$ でのこの関数の最大値・最小値と、それを取る θ の値を求めよ。

解法の流れ

- $R = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$ を計算する
- $\tan\varphi = b/a = 1/\sqrt{3}$ より $\varphi = \pi/6$ を求める
- R sin(θ + ϕ) = 2 sin(θ + π /6) と変換する
- sin(θ + π /6) = 1 のとき最大、= -1 のとき最小

方針

a sin θ + b cos θ は加法定理の逆を使って 1 つの sin 関数にまとめられる。合成すると振幅が $R = \sqrt{a^2+b^2}$ になることが最大値・最小値の計算を簡単にする。

模範解答

【合成の仕組み】

$$a\sin\theta + b\cos\theta = R\sin(\theta+\varphi)$$

において $R\cos\varphi = a$, $R\sin\varphi = b$ と対応させると、加法定理の展開と一致する（確認: $R\sin(\theta+\varphi) = R\cos\varphi\sin\theta + R\sin\varphi\cos\theta$）。

【ϕ の求め方】

$\tan\varphi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$。これは $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{R}$ かつ $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{R}$ を両方満たすことを確認。

$$R = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right) = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

（$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ を使った）

最大値・最小値:

$0 \leq \theta < 2\pi$ より $\dfrac{\pi}{6} \leq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13\pi}{6}$

- 最大値: $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ のとき $\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

最大値 $= 2 \cdot 1 = 2$

- 最小値: $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ のとき $\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{4\pi}{3}$

最小値 $= 2 \cdot (-1) = -2$