二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：数列—基本型漸化式

統合教材

トピック: 等差型・等比型・差が f(n) 型の見抜き方難易度: 標準

問題

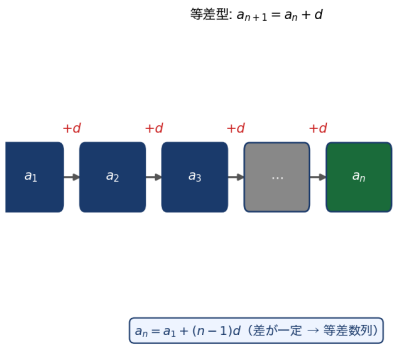
次の各問いに答えよ。
(1) $a_1 = 2$、$a_{n+1} = a_n + 3$ を解いて a_n を求めよ。
(2) $a_1 = 3$、$a_{n+1} = 2a_n$ を解いて a_n と S_n を求めよ。
(3) $a_1 = 1$、$a_{n+1} = a_n + 2^n$ を解いて a_n を求めよ。

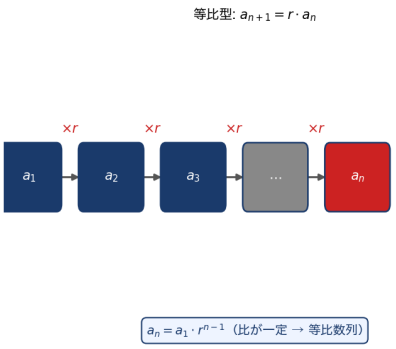
解法の流れ

- $a_{n+1} = a_n + d$ 型：差が一定 → 等差数列 → $a_n = a_1 + (n-1)d$
- $a_{n+1} = ra_n$ 型：比が一定 → 等比数列 → $a_n = a_1 r^{n-1}$
- $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型：差が $f(n)$ で変化 → Σ で積み上げ
- (3) では $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$（$n \geq 2$）を使い、$n = 1$ を別確認する

方針

漸化式の「型の認識」が解法の出発点。「次の項 = 前の項 + 定数」なら差が一定なので等差数列。「次の項 = 前の項 × 定数」なら比が一定なので等比数列。どちらでもなく「次の項 − 前の項 = $f(n)$」のとき、差を累積（Σ足上）一般項求。





模範解答

(1) $a_1 = 2$**,** $a_{n+1} = a_n + 3$

【等差型の認識】
$a_{n+1} - a_n =$ 定数 d
$\Leftrightarrow$ 等差数列（差が一定）
一般項は即座に $a_1 + (n-1)d$ と書ける。

$a_{n+1} - a_n = 3$（定数）なので等差数列：
初項 $a_1 = 2$、公差 $d = 3$

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

(2) $a_1 = 3$**,** $a_{n+1} = 2a_n$

【等比型の認識】
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ 定数 r
$\Leftrightarrow$ 等比数列（比が一定）
$r = 1$ のとき $S_n = na_1$、
$r \neq 1$ のとき $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$
【$r = 1$ の確認】
$r = 2 \neq 1$ を確認してから公式を使う。

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$（定数）なので等比数列：
初項 $a_1 = 3$、公比 $r = 2$

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

S_n を求める（$r = 2 \neq 1$）：

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1)$$

(3) $a_1 = 1$**,** $a_{n+1} = a_n + 2^n$

【差が $f(n)$ のとき】
$a_{n+1} - a_n = f(n)$ が成り立つとき、
$n \geq 2$ で差を積み上げる：

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

これが等差型・等比型に続く
第 3 の基本パターン。
【等比数列の和の公式】
$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$ は初項 2、公比 2、
項数 $n-1$ の等比数列の和：

$$= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 2$$

$a_{n+1} - a_n = 2^n$（n に依存する）
差を累積して求める。
$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$= 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1$$

$n = 1$ **の確認：**

$$a_1 = 1$$

公式 $2^1 - 1 = 1$ と一致 ✓
よって $a_n = 2^n - 1$（全 $n \geq 1$ で成立）

統合教材：数列—1 次変換型漸化式

統合教材

トピック: 固定点を引いて等比型に帰着する難易度: 標準

問題

次の漸化式を解いて一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1 = 1$、$a_{n+1} = 2a_n + 3$

(2) $a_1 = 3$、$a_{n+1} = 3a_n - 4$

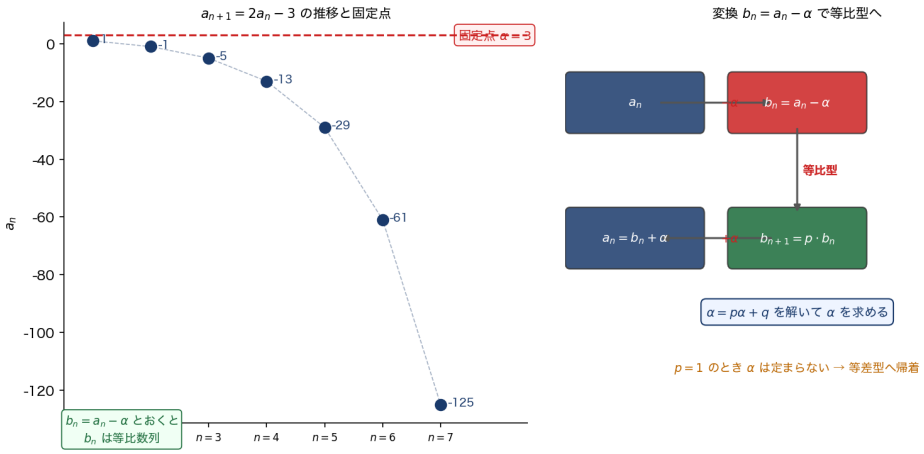
(3) $a_1 = 2$、$a_{n+1} = -2a_n + 6$（$p < 0$ で振動するケース）

解法の流れ

- $a_{n+1} = pa_n + q$ の形を「$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ の形に持ち込む」
- α の条件は $\alpha = p\alpha + q$ を解いて求める（固定点）
- $b_n = a_n - \alpha$ とおくと $b_{n+1} = pb_n$（等比型）
- $p = 1$ のとき α は定まらない → 別の方法（等差型）で解く

方針

$a_{n+1} = pa_n + q$ を変形したい動機は「余分な定数 q を消してしまいたい」こと。$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ が成り立てば $b_n = a_n - \alpha$ は等比数列になる。この条件を α について整理すると $\alpha = p\alpha + q$、すなわち「漸化式の a_n を α に置き換えた方程式の解」が固定点 α である。



模範解答

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$

【固定点の意味】
$\alpha = p\alpha + q$ は「もし $a_n = \alpha$ なら a_{n+1} も α」という不動点。
この α を引くと定数項が消えて純粋な等比型になる。
【変換の手順】
① $\alpha = p\alpha + q$ を解く
② $b_n = a_n - \alpha$ とおく
③ $b_{n+1} = pb_n$ を確認
④ 等比数列として b_n を求める
⑤ $a_n = b_n + \alpha$ に戻す

固定点 α を求める：
$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ になるためには：

$$\alpha = 2\alpha + 3 \implies \alpha = -3$$

$b_n = a_n - \alpha$ **とおく：**

$$b_n = a_n + 3$$

$b_{n+1} = a_{n+1} + 3 = 2a_n + 3 + 3 = 2(a_n + 3) = 2b_n$

これは等比数列（公比 2）：

$$b_1 = a_1 + 3 = 4$$

$$b_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$a_n = b_n - 3 = 2^{n+1} - 3$

(2) $a_1 = 3$**,** $a_{n+1} = 3a_n - 4$

【b_1 の計算】
$b_1 = a_1 - \alpha$ であり、
a_1 は与えられているので
代入するだけでよい。
【確認】
$n = 1$: $3^0 + 2 = 3 = a_1$ ✓
$n = 2$: $a_2 = 3 \cdot 3 - 4 = 5$
公式: $3^1 + 2 = 5$ ✓

固定点を求める：

$$\alpha = 3\alpha - 4 \implies -2\alpha = -4 \implies \alpha = 2$$

$b_n = a_n - 2$ とおく：

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 3a_n - 4 - 2$$

$$= 3a_n - 6 = 3(a_n - 2) = 3b_n$$

等比数列（公比 3）：

$$b_1 = a_1 - 2 = 1$$

$$b_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$a_n = b_n + 2 = 3^{n-1} + 2$$

(3) $a_1 = 2$**,** $a_{n+1} = -2a_n + 6$（$p < 0$ **の振動**）

【$b_1 = 0$ のケース】
$b_1 = 0$ なら $b_n = 0 \cdot r^{n-1} = 0$。
すなわち $a_n = \alpha$ が定数列。
初項 $a_1 = 2 = \alpha$ なので
最初から固定点にいた、ということ。
【$p < 0$ の場合の振動】
公比 $r = -2$ の等比数列は
正・負を交互にとる（振動する）。
今回は偶然 $b_1 = 0$ なので振動しないが、
例えば $a_1 = 3$ なら $b_1 = 1$、
$b_n = (-2)^{n-1}$ と振動する。

固定点を求める：

$$\alpha = -2\alpha + 6 \implies 3\alpha = 6 \implies \alpha = 2$$

$b_n = a_n - 2$ とおく：

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = -2a_n + 6 - 2$$

$$= -2a_n + 4 = -2(a_n - 2) = -2b_n$$

等比数列（公比 -2）：

$$b_1 = a_1 - 2 = 0$$

$$b_n = 0 \times (-2)^{n-1} = 0$$

$$a_n = b_n + 2 = 2 \quad (\text{全} n \geq 1)$$

統合教材：数列—$a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型漸化式

統合教材

トピック: Σ で一般項を求める・n=1 の別確認難易度: 標準

問題

次の漸化式を解いて一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1 = 2$、$a_{n+1} - a_n = 3n$

(2) $a_1 = 1$、$a_{n+1} - a_n = 2^n$

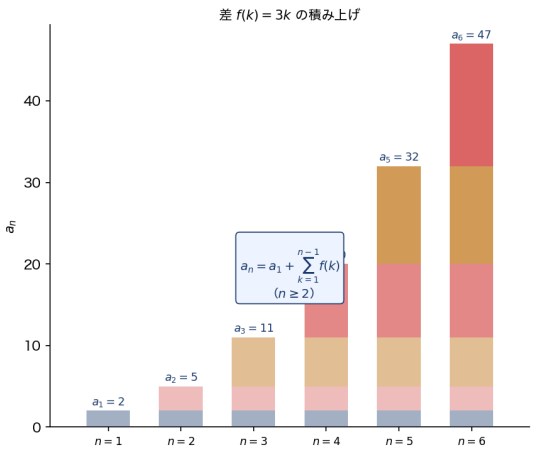
(3) $a_1 = 3$、$a_{n+1} = a_n + n^2$

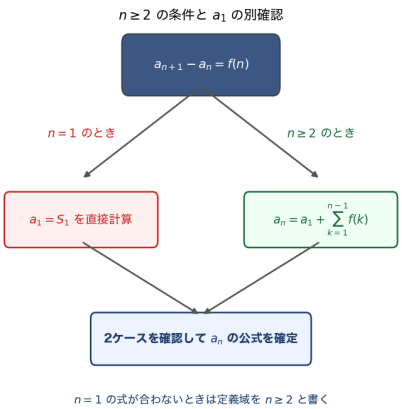
解法の流れ

- $a_{n+1} - a_n = f(n)$ のとき、差を $k = 1$ から $k = n - 1$ まで足し上げると一般項が求まる
- $n \geq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$
- 得られた式は必ず $n = 1$ で確認する（式に代入した値が a_1 と一致するか）
- 一致すれば全 $n \geq 1$ で成立、一致しなければ「$a_1 = \cdots$、$n \geq 2$ のとき $\cdots$」と書く

方針

差が定数でないとき（$f(n)$ が n に依存するとき）は、等差型や等比型には直接帰着できない。代わりに漸化式を $k = 1, 2, \ldots, n-1$ の $n-1$ 式としてたてに足す操作（「差の積み上げ」）を行う。これにより $a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ が導ける。





模範解答

(1) $a_1 = 2$**,** $a_{n+1} - a_n = 3n$

【差の積み上げの手順】

$$a_2 - a_1 = 3 \times 1$$

$$a_3 - a_2 = 3 \times 2$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = 3(n-1)$$

縦に足すと左辺は $a_n - a_1$（中間項消去)。
右辺は $\sum_{k=1}^{n-1} 3k$ になる。

$n \geq 2$ **のとき：**
差を $k = 1$ から $k = n - 1$ まで足す：

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 3k = 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$

$$a_n = 2 + \frac{3n(n-1)}{2}$$

$n = 1$ **の確認：**

$$a_1 = 2 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 0}{2} = 2 \quad \checkmark$$

a_1 の値と一致するので

$$a_n = 2 + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 - 3n + 4}{2}$$

が全 $n \geq 1$ で成立。

(2) $a_1 = 1$**,** $a_{n+1} - a_n = 2^n$

【等比型の差】
$f(k) = 2^k$ は等比数列なので
$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$ は等比数列の和の公式で計算できる。
初項 2、公比 2、項数 $n-1$：

$$= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 2$$

$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

等比数列の和（$r = 2 \neq 1$）：

$$= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 2$$

$$a_n = 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1$$

$n = 1$ **の確認：**

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

よって $a_n = 2^n - 1$（全 $n \geq 1$ で成立）

(3) $a_1 = 3$**,** $a_{n+1} = a_n + n^2$

【Σk^2 の公式】

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

n を $n-1$ に置き換えた形：
元の公式 $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$
に $m = n-1$ を代入する。
【$n = 1$ で空和が 0 になる】
$n = 1$ のとき $\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0$（空和）
なので公式値は $a_1 + 0 = a_1$ となる。
空和は常に 0 と定義する。

$a_{n+1} - a_n = n^2$ なので差を積み上げる。
$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= 3 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$n = 1$ **の確認：**

$$a_1 = 3 + \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 3 \quad \checkmark$$

よって：

$$a_n = 3 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

（全 $n \geq 1$ で成立）