二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：数列—階差数列

統合教材

トピック: $\mathrm{b}_n = a_{n+1} - a_n a_n$復元難易度 : 標準

問題

次の各問いに答えよ。

(1) 数列 $1, 3, 7, 13, 21, \ldots$ の一般項を求めよ。

(2) $a_1 = 2$、階差数列 $b_n = 3^n$ のとき a_n を求めよ。

(3) 数列 $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ の一般項を求め、階差数列が等差数列であることを確認せよ。

解法の流れ

- 数列の隣り合う項の差 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を**階差数列**という
- $n \geq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$
- 得られた式は必ず $n = 1$ で確認する
- 一致すれば全 $n \geq 1$ で成立

方針

「連続する差を全部足せば元に戻る」というのが階差数列の核心。$a_n - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$。この「差の積み上げ」により一般項が求まる。ただし $n = 1$ のとき $\sum_{k=1}^{0} b_k = 0$（空和）だから $a_1 + 0 = a_1$ となり、公式が $n = 1$ でも成立するかどうかは代入して確認が必要。

階差数列の表（$a_n = n^2 + n$ の例）

n	a_n	$b_n = a_{n+1} - a_n$	$\Delta^2 a_n$
1	2	4	2
2	6	6	2
3	12	8	2
4	20	10	2
5	30	12	—
6	42	—	—

$b_n = 2n + 2$（等差）、$\Delta^2 a_n = 2$（定数）

$n \geq 2$ の制約: a_1 は別確認が必要

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

$n = 2$（公式）	$n = 1$（公式 外！）
$a_2 = a_1 + b_1$	$a_1 + \sum_{k=1}^{0} b_k$
$= 2 + 4 = 6$ ✓	$= a_1 + 0 = a_1$（空和）

▶ $n = 1$ 代入: 公式が $a_1 = a_1$ となるのは偶然一致
（b_k の添字が 1 から始まっているため）

公式が $n = 1$ で成立するか必ず確認する。
成立しない場合は「$a_1 = \bigcirc\bigcirc$、$n \geq 2$ のとき …」と書く

模範解答

(1) 数列 $1, 3, 7, 13, 21, \ldots$

【階差数列の見つけ方】
与えられた数列の各項から次の項を引いて新しい列を作る。

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+4} 7 \xrightarrow{+6} 13 \xrightarrow{+8} 21$$

差の列 $2, 4, 6, 8, \ldots$ が等差数列なので $b_n = 2n$ と分かる。
【Σk の公式】

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$$

元の公式 $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$ に $m = n-1$ を代入する。

まず階差数列 b_n を調べる：

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 4, \quad b_3 = 6, \quad b_4 = 8$$

差が一定（公差 2）なので $b_n = 2n$（等差数列)。
$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 1 + n(n-1)$$

$$= n^2 - n + 1$$

$n = 1$ **の確認：**

$$1^2 - 1 + 1 = 1 = a_1 \quad \checkmark$$

よって $a_n = n^2 - n + 1$（全 $n \geq 1$ で成立）

(2) $a_1 = 2$、$b_n = 3^n$

【等比数列の和の注意】
$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ の計算：
初項 $3^1 = 3$、公比 3、項数 $n-1$。

$$= \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$n = 2$ で確認:

$$\sum_{k=1}^{1} 3^k = 3 = \frac{3(3^1-1)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \quad \checkmark$$

【$n = 1$ チェックの意義】
階差の積み上げ式は $n \geq 2$ で導いたものなので、$n = 1$ が自動的に成立する保証はない。代入して確認が必要。

$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

等比数列の和（初項 3、公比 3、項数 $n-1$、$r = 3 \neq 1$）：

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3^n - 3}{2}$$

$$a_n = 2 + \frac{3^n - 3}{2} = \frac{3^n + 1}{2}$$

$n = 1$ **の確認：**

$$\frac{3^1 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 = a_1 \quad \checkmark$$

よって $a_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$（全 $n \geq 1$ で成立）

(3) 数列 $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$

【第二階差が定数】
第一階差 $b_n = 4, 6, 8, 10, \ldots$ の差（第二階差）は $2, 2, 2, \ldots$ で定数。
第二階差が定数 $\Leftrightarrow$ a_n は n の 2 次式になる。
【確認】
$b_n = a_{n+1} - a_n$ が等差数列か確認：

$$b_n = (n+1)(n+2) - n(n+1)$$

$$= (n+1)\{(n+2) - n\}$$

$$= 2(n+1)$$

これは公差 2 の等差数列 ✓

第一階差 b_n を求める：

$$b_1 = 4,\ b_2 = 6,\ b_3 = 8,\ b_4 = 10$$

公差 2 の等差数列：$b_n = 2n + 2$
$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1)$$

$$= 2 + n(n-1) + 2(n-1)$$

$$= 2 + (n-1)(n+2)$$

$$= n^2 + n$$

$n = 1$ **の確認：**

$$1^2 + 1 = 2 = a_1 \quad ✓$$

よって $a_n = n^2 + n = n(n+1)$

統合教材：数列—群数列

統合教材

トピック: 第何群の第何番目か、2 段階分解で解く難易度: 標準

問題

数列を次のように群に分ける：

$$\underbrace{1}_{1群}\,|\,\underbrace{2,3}_{2群}\,|\,\underbrace{4,5,6}_{3群}\,|\,\underbrace{7,8,9,10}_{4群}\,|\cdots$$

第 n 群には n 個の整数が含まれる。

(1) 第 n 群の最初の項と最後の項を求めよ。

(2) 第 100 項は第何群の第何番目の項か。

(3) 分数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ を群に分けて第 30 項を求めよ。

解法の流れ

- 群数列の解法は「第何群か」と「群内の何番目か」の 2 段階に分解する
- **第 1 段階**：第 n 群の末項が全体の第何項かを求める（群の累積個数）
- **第 2 段階**：求めたい項がどの群に入るかを調べ、群内の位置を計算する
- 第 n 群末項の全体番号 $= 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

方針

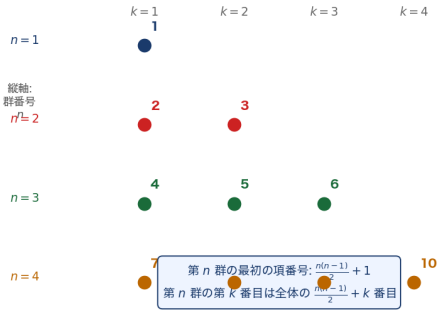
群数列の本質は「どの群として見るかを決めれば規則が見える」こと。まず「第 n 群は何個の項を含むか」を把握し、そこから「第 n 群末項が全体の第何項か」（累積個数）を計算する。求めたい項の全体番号が分かれば、どの群のどこにあるかは「累積個数と比較する不等式」で特定できる。

群数列の区切り

第 n 群	要素数	最初の項番号	最後の項番号
1	1	1	1
2	2	2	3
3	3	4	6
4	4	7	10
n	n	$\frac{n(n-1)}{2}+1$	$\frac{n(n+1)}{2}$

第 n 群・第 k 番目の位置

横軸: 群内の位置 k



模範解答

(1) 第 n 群の最初の項・最後の項

【具体的に確認】

群	個数	末項の全体番号	値
1	1	1	1
2	2	3	3
3	3	6	6
4	4	10	10

$n = 3$: 末項は全体第 6 項 $= 6$ ✓
初項 $= \frac{2\cdot 3}{2} + 1 = 4$
第 3 群は 4, 5, 6 ✓

第 n 群末項の全体番号：
第 1 群〜第 n 群の合計個数は

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

よって第 n 群の末項は全体の第 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 項。
第 n 群の末項の値：
この数列では「全体の第 m 項 $= m$」なので

$$（第\ n\ 群末項）\ = \frac{n(n+1)}{2}$$

第 n 群の初項の値：
第 n 群の直前（第 $n-1$ 群）末項が $\dfrac{(n-1)n}{2}$
なので

$$（第\ n\ 群初項）\ = \frac{(n-1)n}{2} + 1$$

(2) 第 100 項が第何群の第何番目か

【2 段階分解の手順】
① 第 n 群末項の全体番号 $L(n)$ を求める

$$L(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

② $L(n-1) < m \leq L(n)$ となる n を求める
（m が求めたい項の全体番号）
③ 群内位置 $= m - L(n-1)$
【確認】
第 14 群の第 9 番目の値：
初項 $= L(13) + 1 = 92$

$$92 + (9-1) = 100 \quad \checkmark$$

（この数列は第 m 項 $= m$ なので第 100 項の値は 100）

第 1 段階：どの群か
第 n 群末項の全体番号は $\dfrac{n(n+1)}{2}$。

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq 100$$

を満たす最小の n を求める。
$n = 13$: $\dfrac{13 \cdot 14}{2} = 91 < 100$
$n = 14$: $\dfrac{14 \cdot 15}{2} = 105 \geq 100$
よって第 100 項は**第 14 群**にある。
第 2 段階：群内の位置
第 13 群末項は全体の第 91 項。
第 100 項は第 14 群の

$$100 - 91 = 9$$

よって第 14 群の**第 9 番目**。

(3) 分数列の第 30 項

【分数列の群の構造】
第 n 群の k 番目は $\dfrac{k}{n}$

群	内容	個数
1	$1/1$	1
2	$1/2, 2/2$	2
3	$1/3, 2/3, 3/3$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	$1/8, 2/8, \ldots, 8/8$	8

【答えの確認】
第 29 項 $= L(7)$ 番目 $= \dfrac{7}{7} = 1$
第 30 項は第 8 群の第 1 番目の次
$= \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ ✓

この数列を群に分けると：
第 n 群は $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}$（$n$ 個）
第 n 群末項の全体番号：

$$L(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

第 1 段階：第 30 項はどの群か
$n = 7$: $L(7) = \dfrac{7 \cdot 8}{2} = 28 < 30$
$n = 8$: $L(8) = \dfrac{8 \cdot 9}{2} = 36 \geq 30$
よって第 30 項は**第 8 群**にある。
第 2 段階：群内の位置

$$30 - 28 = 2$$

第 8 群の第 2 番目 $= \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$