二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：数列—等差数列

統合教材

トピック: 等差数列の一般項と和難易度: 標準

問題

次の各問いに答えよ。

(1) 初項 $a_1 = 3$、公差 $d = 4$ の等差数列について、a_{10} と S_{10} を求めよ。

(2) $a_3 = 11$、$a_7 = 27$ のとき、一般項 a_n と S_n を求めよ。

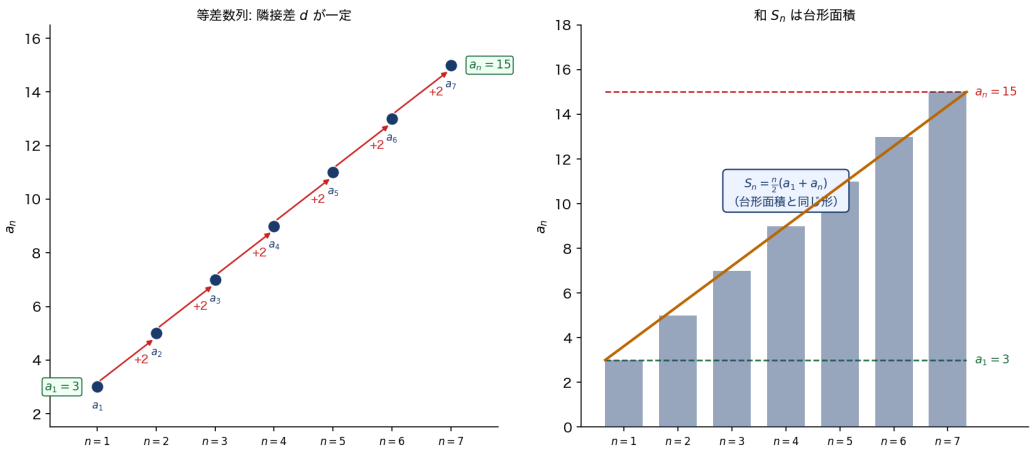
(3) $S_n = 3n^2 + 2n$ となる数列の初項・公差・一般項 a_n を求めよ。

解法の流れ

- 等差数列では「隣り合う項の差が一定（= d)」という 1 つの観察が出発点
- 一般項は $a_n = a_1 + (n-1)d$ であり、これは a_1 から d を $(n-1)$ 回足した結果
- 和の公式 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ は台形面積と同じ形：高さ a_1 と a_n、底辺 n
- (3) では $a_n = S_n - S_{n-1}$（$n \geq 2$）を使い、$a_1 = S_1$ を別確認する

方針

等差数列の中心は「差が一定」という定義である。一般項は a_1 から d を $(n-1)$ 個積み上げる操作として導ける（テレスコーピングの一形態)。和は「逆順に足す」と全 n 項が同じ値になることから $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ が生まれる。S_n が既知の場合は $a_n = S_n - S_{n-1}$ を使うが、これは $n \geq 2$ での公式なので $n = 1$ は $a_1 = S_1$ で別確認する。



模範解答

(1) $a_1 = 3$, $d = 4$ **のとき** a_{10} **と** S_{10}

【一般項の導出】
a_1 から d を $(n-1)$ 回足す：

$$a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \cdots + d}_{n-1\text{ 個}}$$

$$= a_1 + (n-1)d$$

【和の公式の意味】
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を
逆順に足すと全項の和が $(a_1 + a_n)$ になる：

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

台形の面積公式と同じ形。

一般項の公式に代入する：

$$a_{10} = 3 + (10-1) \times 4$$

$$= 3 + 36 = 39$$

和の公式に代入する：

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$$

$$= 5 \times (3 + 39) = 5 \times 42$$

$$= 210$$

(2) $a_3 = 11$**,** $a_7 = 27$ **のとき** a_n **と** S_n

【連立方程式の立て方】
a_1 と d の 2 つの未知数に対して
a_3 と a_7 の 2 式を立てる。
引き算で a_1 を消去し d を求める。
【和の式の整理】

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2}(3 + 4n - 1)$$

$$= \frac{n(4n+2)}{2} = n(2n+1)$$

結果は n の 2 次式になる
(等差数列の和は必ず 2 次式)。

$a_n = a_1 + (n-1)d$ に代入する：

$$a_3 = a_1 + 2d = 11 \quad \cdots (i)$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 27 \quad \cdots (ii)$$

$(ii) - (i)$ より：

$$4d = 16, \quad d = 4$$

(i) に代入：

$$a_1 = 11 - 2 \times 4 = 3$$

よって：

$$a_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$$

$$S_n = \frac{n}{2}(3 + (4n-1)) = \frac{n}{2}(4n+2)$$

$$= n(2n+1) = 2n^2 + n$$

(3) $S_n = 3n^2 + 2n$ **から** a_n **を求める**

【S_n からの逆算の手順】
① $n \geq 2$ で $a_n = S_n - S_{n-1}$ を計算
② $n = 1$ を代入して S_1 と比較
③ 一致すれば全 n で成立
一致しない場合は「$a_1 = S_1$、$n \geq 2$ のとき $a_n = \cdots$」と書く。
【公差の読み取り】
$a_n = 6n - 1$ は n の 1 次式なので公差 d は係数 6 と読める：

$$d = a_{n+1} - a_n = 6$$

$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (3n^2 + 2n) - (3(n-1)^2 + 2(n-1))$$

$$= 3n^2 + 2n - (3n^2 - 6n + 3 + 2n - 2)$$

$$= 3n^2 + 2n - 3n^2 + 4n - 1$$

$$= 6n - 1$$

$n = 1$ **の確認：**

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 = 5$$

公式 $6 \times 1 - 1 = 5$ と一致 ✓
よって $a_n = 6n - 1$（全 $n \geq 1$ で成立）
初項 $a_1 = 5$、公差 $d = 6$ の等差数列。

統合教材：数列—等比数列

統合教材

トピック: 等比数列の一般項と和（r=1 と r≠1 のケース分岐）難易度: 標準

問題

次の各問いに答えよ。

(1) 初項 $a_1 = 2$、公比 $r = 3$ の等比数列について、a_5 と S_5 を求めよ。

(2) $a_2 = 6$、$a_5 = 162$ のとき、公比 r と一般項 a_n を求めよ。

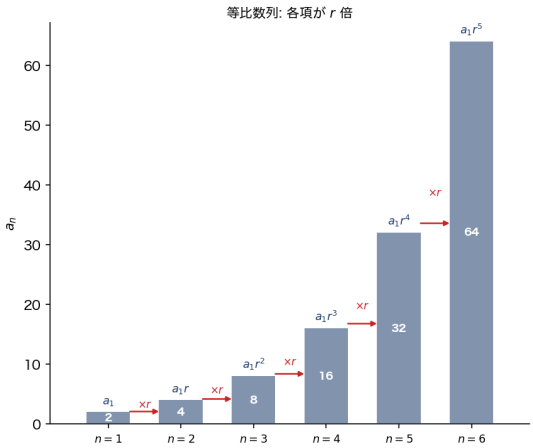
(3) 初項 $a_1 = 1$、公比 $r = -2$ の等比数列の和 S_n を求めよ。n が偶数の場合と奇数の場合に分けて確認せよ。

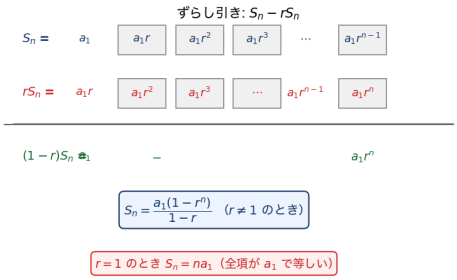
解法の流れ

- 等比数列では「隣り合う項の比が一定（= r)」という 1 つの観察が出発点
- 一般項：$a_n = a_1 r^{n-1}$
- 和の公式は $r = 1$ のとき $S_n = na_1$、$r \neq 1$ のとき $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$
- $r = 1$ と $r \neq 1$ の場合分けを省略しないこと
- ずらし引き法：rS_n を作って引くと等比部分が消えて計算できる

方針

等比数列の核心は「各項を r 倍すると次の項になる」という性質。和を求めるには S_n と rS_n を並べて引く「ずらし引き法」を使う。$r = 1$ のとき全項が a_1 で等しいので $S_n = na_1$ となり、$r \neq 1$ のときに初めて公式が使える。この場合分けを忘れると答えが間違いになるので必ず確認する。


等比数列: 各項が r 倍
a_n
0
10
20
30
40
50
60
a_1
2
×r
$a_1 r$
4
×r
$a_1 r^2$
8
×r
$a_1 r^3$
16
×r
$a_1 r^4$
32
×r
$a_1 r^5$
64
$n=1$
$n=2$
$n=3$
$n=4$
$n=5$
$n=6$


ずらし引き: $S_n - rS_n$
$S_n =$ a_1 $a_1 r$ $a_1 r^2$ $a_1 r^3$ $\cdots$ $a_1 r^{n-1}$
$rS_n =$ $a_1 r$ $a_1 r^2$ $a_1 r^3$ $\cdots$ $a_1 r^{n-1}$ $a_1 r^n$
$(1-r)S_n =$ a_1 $-$ $a_1 r^n$
$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ $(r \neq 1$ のとき$)$
$r=1$ のとき $S_n = na_1$（全項が a_1 で等しい）

模範解答

(1) $a_1 = 2$**,** $r = 3$ **のとき** a_5 **と** S_5

【$r = 1$ と $r \neq 1$ の確認】
$r = 3 \neq 1$ を最初に確認し
公式 $\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ を使う。
【ずらし引き法の仕組み】

$$S_n = a_1 + a_1 r + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^n$$

差をとると中間項が消えて：

$$(1-r)S_n = a_1 - a_1 r^n$$

一般項の公式に代入する：

$$a_5 = 2 \times 3^{5-1} = 2 \times 81 = 162$$

$r = 3 \neq 1$ なので和の公式が使える：

$$S_5 = \frac{2(1-3^5)}{1-3}$$

$$= \frac{2(1-243)}{-2}$$

$$= \frac{2 \times (-242)}{-2} = 242$$

(2) $a_2 = 6$**,** $a_5 = 162$ **のとき公比と一般項**

【比を使って a_1 を消去】
a_m と a_n の比をとると：

$$\frac{a_n}{a_m} = r^{n-m}$$

$m = 2$、$n = 5$ のとき r^3 が求まる。
【実数解の確認】
$r^3 = 27$ の解は実数では $r = 3$ のみ。
$r^2 = k$ の場合は $\pm\sqrt{k}$ の
2 解が出ることに注意。

$a_n = a_1 r^{n-1}$ を使う：

$$a_2 = a_1 r = 6 \quad \cdots (i)$$

$$a_5 = a_1 r^4 = 162 \quad \cdots (ii)$$

$(ii) \div (i)$：

$$r^3 = \frac{162}{6} = 27$$

$$r = 3$$

(i) に代入：

$$a_1 = \frac{6}{3} = 2$$

よって：

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

(3) $a_1 = 1$**,** $r = -2$ **のとき** S_n

【$r < 0$ のとき振動に注意】
$r = -2$ のとき項は正・負を交互にとる：

$$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \ldots$$

和も増減を繰り返す。
【公式はそのまま適用できる】
$r \neq 1$ であれば $r < 0$ でも

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

が成立する（ずらし引き法の導出は
r の符号によらない）。
【$r = 1$ の別公式を必ず確認】
$r = -2$ は $r = 1$ でないことを
明示して公式を使う。

$r = -2 \neq 1$ なので：

$$S_n = \frac{1 \times (1 - (-2)^n)}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{1 - (-2)^n}{3}$$

n **が偶数のとき：**
$(-2)^n = 2^n > 0$ なので：

$$S_n = \frac{1 - 2^n}{3}$$

（例: $S_2 = \frac{1-4}{3} = -1$）
n **が奇数のとき：**
$(-2)^n = -2^n < 0$ なので：

$$S_n = \frac{1 + 2^n}{3}$$

（例: $S_1 = 1$, $S_3 = \frac{1+8}{3} = 3$）

統合教材：数列—一般項と和の関係

統合教材

トピック: $a_n = S_n - S_{n-1}$ の意味と $n \geq 2$ の制限難易度: 標準

問題

次の各問いに答えよ。

(1) $S_n = n^2 + 3n$ のとき、a_n を求めよ（$n = 1$ を別確認すること）。

(2) $S_n = 2^n - 1$ のとき、a_n を求めよ（$n = 1$ でも公式が成立するか確認すること）。

(3) $S_n = 3n^2 - n$ のとき、a_n を求めて等差数列であることを検証せよ。

解法の流れ

- S_n から a_n を求めるには $a_n = S_n - S_{n-1}$ を使う
- この公式は $n \geq 2$ のときのみ有効（S_0 は「0 項の和」で通常定義しない）
- $n = 1$ は必ず $a_1 = S_1$ で別途確認する
- 公式の値と S_1 が一致すれば全 $n \geq 1$ で成立

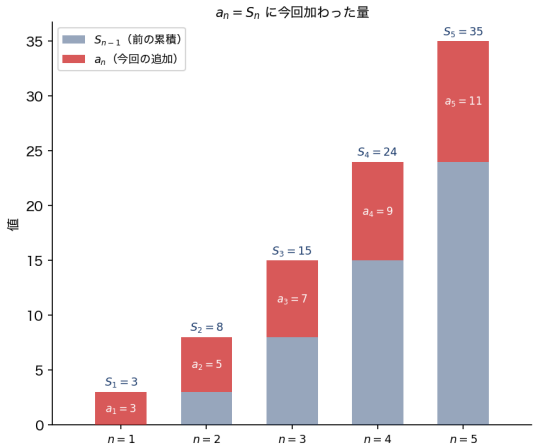
方針

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ および $S_{n-1} = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ の差が a_n になることは定義そのもの。しかしこれは $n - 1 \geq 1$、すなわち $n \geq 2$ の場合にしか意味をもたない。$n = 1$ のとき「S_0」という量は通常定義されないか、定義しても $S_0 = 0$ という約束が必要になる。公式を使う前に $n \geq 2$ と明記し、$n = 1$ を $a_1 = S_1$ で確認することを習慣にする。

a_n と S_n の関係表

n	a_n	S_n	$S_n - S_{n-1}$
1	3	3	–
2	5	8	5
3	7	15	7
4	9	24	9
5	11	35	11

$n \geq 2$ のとき $S_n - S_{n-1} = a_n$
$n = 1$ のとき $a_1 = S_1$ を別確認



模範解答

(1) $S_n = n^2 + 3n$ **のとき** a_n

【$n \geq 2$ を明記する理由】
$a_n = S_n - S_{n-1}$ は
「第 n 項 = 第 n 項までの和
− 第 $n-1$ 項までの和」
であり、$n - 1 \geq 1$ が必要。
【$n = 1$ の別確認の意味】
公式の式 $2n + 2$ に $n = 1$ を代入した値が
S_1 の値と一致するかを確認する。
一致すれば定義域を $n \geq 1$ に広げてよい。

$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 3n) - ((n-1)^2 + 3(n-1))$$

$$= n^2 + 3n - (n^2 - 2n + 1 + 3n - 3)$$

$$= n^2 + 3n - n^2 + 2n - 1 - 3n + 3$$

$$= 2n + 2$$

$n = 1$ **の確認：**

$$a_1 = S_1 = 1 + 3 = 4$$

公式 $2 \times 1 + 2 = 4$ と一致 ✓
よって $a_n = 2n + 2$（全 $n \geq 1$ で成立）

(2) $S_n = 2^n - 1$ **のとき** a_n

【指数型 S_n の注意点】
$S_n = 2^n - 1$ のとき
$S_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ であり、
-1 の部分は差をとると消える。
【等比数列の確認】
$a_n = 2^{n-1}$ は初項 1、公比 2 の
等比数列。$S_n = \frac{1(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1$
と確認できる。

$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1)$$

$$= 2^n - 2^{n-1}$$

$$= 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$$

$n = 1$ **の確認：**

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$$

公式 $2^{1-1} = 1$ と一致 ✓
よって $a_n = 2^{n-1}$（全 $n \geq 1$ で成立）

(3) $S_n = 3n^2 - n$ **のとき** a_n **と等差確認**

【S_n が 2 次式 → a_n は 1 次式】
等差数列の和は n の 2 次式なので、
逆に S_n が 2 次式ならば
a_n は 1 次式（等差数列）になる。
【公差の読み取り】
$a_n = 6n - 4$ の係数 6 が公差 d。
より正式には：

$$d = a_{n+1} - a_n = 6$$

で確認する。
【初項の確認】
$a_1 = 6 \times 1 - 4 = 2$。
これが $S_1 = 3 - 1 = 2$ と一致する。

$n \geq 2$ **のとき：**

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (3n^2 - n) - (3(n-1)^2 - (n-1))$$

$$= 3n^2 - n - (3n^2 - 6n + 3 - n + 1)$$

$$= 3n^2 - n - 3n^2 + 7n - 4$$

$$= 6n - 4$$

$n = 1$ **の確認：**

$$a_1 = S_1 = 3 - 1 = 2$$

公式 $6 \times 1 - 4 = 2$ と一致 ✓
よって $a_n = 6n - 4$。
等差数列の検証：

$$a_{n+1} - a_n = (6(n+1) - 4) - (6n - 4) = 6$$

公差 $d = 6$ が一定 $\Rightarrow$ 等差数列 ✓