統合教材：対数関数例題 1

統合教材

トピック: 対数方程式と真数条件の確認難易度: 標準

問題

方程式 $\log_3(x-2)+\log_3(x+4)=3$ を解け。

解法の流れ

- 真数条件 $x-2>0$ かつ $x+4>0$ を書き出す
- 対数の積の公式で左辺を 1 つの対数にまとめる
- 真数の等式を解いてから真数条件を確認する

方針

対数方程式では**真数条件の確認**が最初に必要である。対数 $\log_a M$ は $M>0$ のときのみ定義されるので、方程式の解が真数条件を満たすかどうかを必ず確認する。積の公式 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ を使うと左辺を 1 つの対数にまとめられる。

 統合教材

模範解答

【真数条件を先に書く理由】
$\log_3(x-2)$ は $x-2>0$ すなわち $x>2$ のときのみ意味を持つ。この条件なしに計算を進めると、定義されない対数を扱うことになる。
真数条件は「解の候補を絞る条件」ではなく「式が意味を持つための前提条件」であるから、必ず最初に書く。

【積の公式の使い方】
$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$（底が共通のとき）
左辺の 2 項を 1 つにまとめることで、方程式を「真数 = 数」の形に変形できる。

真数条件

$$x-2>0 \quad \text{かつ} \quad x+4>0$$

$$x>2 \quad \text{かつ} \quad x>-4$$

よって $x>2$。

方程式を解く

積の公式より

$$\log_3(x-2)(x+4)=3$$

底の定義から

$$(x-2)(x+4)=3^3=27$$

$$x^2+2x-8=27$$

$$x^2+2x-35=0$$

$$(x+7)(x-5)=0$$

$$x=-7 \quad \text{または} \quad x=5 \qquad 2$$

真数条件 $x>2$ を確認すると $x=-7$ は不適。

$$\boxed{x=5}$$

統合教材：対数関数例題 2

統合教材

トピック: 対数を置換して解く対数方程式難易度: 標準

問題

方程式 $(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x - 4 = 0$ を解け。

解法の流れ

- $t = \log_2 x$ と置換する（$x > 0$ の真数条件が必要）
- t についての二次方程式を解く
- $t = \log_2 x$ に戻して x を求める

方針

対数が繰り返し現れる方程式では $t = \log_a x$ と置換すると二次方程式に帰着できる。置換のメリットは「対数の複雑な計算を、使い慣れた二次方程式の手法に変換する」ことである。ただし元の方程式には真数条件 $x > 0$ があることを念頭に置く。

模範解答

【置換で扱いやすくする】
$(\log_2 x)^2$ は $\log_2 x$ を 1 つの文字として見ると「2 乗」になっている。$t = \log_2 x$ とおけば $t^2 + 3t - 4 = 0$ という標準的な二次方程式が現れる。
t の値は負にもなりうる（$t = -4$ のとき $x = 1/16 > 0$ なので有効）。t の範囲に制約はないが、$x > 0$ は必ず確認する。

真数条件：$x > 0$。
$t = \log_2 x$ とおくと

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

因数分解すると

$$(t+4)(t-1) = 0$$

$$t = -4 \quad \text{または} \quad t = 1$$

それぞれ x に戻す。

- $\log_2 x = -4 \implies x = 2^{-4} = \dfrac{1}{16}$
- $\log_2 x = 1 \implies x = 2^1 = 2$

どちらも $x > 0$ を満たす。

$$\boxed{x = \frac{1}{16}, \quad x = 2}$$

統合教材：対数関数例題 3

統合教材

トピック: 真数条件と底による不等号の向きの変化難易度: 標準

問題

不等式 $\log_2(x-1) > \log_2(3-x)$ を解け。

解法の流れ

- 真数条件 $x-1>0$ かつ $3-x>0$ から範囲を求める
- 底 $2>1$ なので $y=\log_2 x$ は単調増加 → 不等号の向きはそのまま
- 真数の不等式を解いて真数条件と共通部分を取る

方針

対数不等式では真数条件と不等号の向きの 2 点が重要である。真数条件を満たす範囲を先に求めておき、その後で底の値から不等号の向きを判断する。底 $a>1$ のとき $y=\log_a x$ は単調増加なので不等号の向きは変わらない。底 $0<a<1$ のとき単調減少なので逆転する。

模範解答

【真数条件と解の共通部分】
真数条件が定める範囲 $1 < x < 3$ は「方程式・不等式が定義される範囲」である。最後に必ずこの範囲との共通部分を取ることで、対数が定義されない点を除外できる。

【底と不等号の向き】
$\log_2 x$ は単調増加なので

$$\log_2 p > \log_2 q \iff p > q$$

底が $0 < a < 1$ のとき単調減少なので向きが逆転する（例題 4 参照）。

真数条件

$$x - 1 > 0 \quad かつ \quad 3 - x > 0$$

$$x > 1 \quad かつ \quad x < 3$$

よって $1 < x < 3$。

不等式を解く

底 $2 > 1$ より $y = \log_2 x$ は単調増加。よって不等号の向きはそのまま。

$$x - 1 > 3 - x$$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

真数条件 $1 < x < 3$ との共通部分を取ると

$$\boxed{2 < x < 3}$$

統合教材：対数関数例題 4

統合教材

トピック: 底の変換公式と計算への応用難易度: 標準

問題

次の値を求めよ。

(1) $\log_4 32$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

解法の流れ

- (1) 底を 2 に変換する（底の変換公式）
- (2) $\log_3 8$ の底を 2 に変換してから積を計算する
- 底の変換公式：$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

方針

底の変換公式 $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を用いると、異なる底の対数を共通の底（常用対数や自然対数、あるいは計算しやすい底）に統一できる。(2) では積の形を利用して計算が単純になることに気づくことがポイント。

模範解答

(1) $\log_4 32$

【底の変換公式の使い方】

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

分子は「真数の対数」、分母は「元の底の対数」。どの底 c（$c > 0, c \neq 1$）に変換してもよいが、計算しやすい底を選ぶ。4 と 32 はともに 2 の累乗なので底 2 が最適。

底の変換公式で底を 2 に変換する。

$$\log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4}$$

$32 = 2^5, \quad 4 = 2^2$ より

$$= \frac{5}{2}$$

$$\boxed{\log_4 32 = \frac{5}{2}}$$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

【対数の連鎖公式】

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

(2) では $\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 8 = 3$ と直接計算できる。これは底の変換公式から導かれる「連鎖公式」の一例で、積の中間の底が消えるという性質がある。

$\log_3 8$ を底の変換公式で底 2 に変換する。

$$\log_3 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 3} = \frac{3}{\log_2 3}$$

これを代入すると

$$\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 3 \cdot \frac{3}{\log_2 3} = 3$$

$$\boxed{\log_2 3 \cdot \log_3 8 = 3}$$