二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：積分—定積分の計算（F(b)−F(a)）

統合教材

トピック: 微積分の基本定理・$[F(x)]_a^b$ の計算手順難易度: 標準

問題

次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

(2) $\int_{-1}^2 (x^2 - x)\,dx$

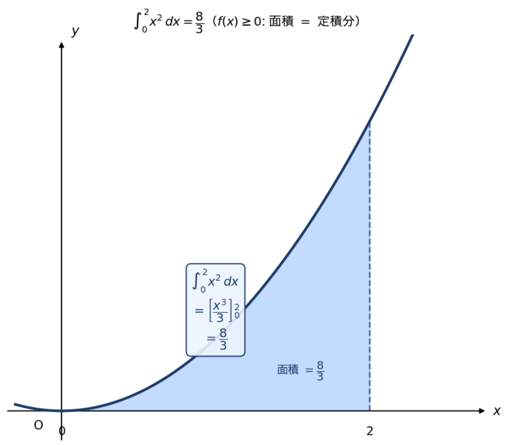
(3) $\int_{-2}^1 (2x + 1)\,dx$

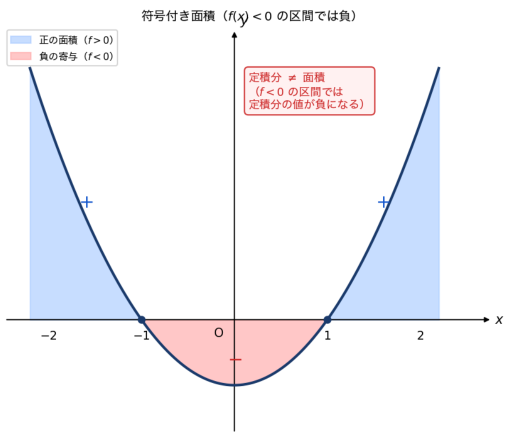
解法の流れ

- 被積分関数の原始関数 $F(x)$ を求める（定積分では C は不要）
- $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ を計算する
- 数値を丁寧に代入し、引き算を正確に行う

方針

微積分の基本定理：連続関数 $f(x)$ に対し、$F'(x) = f(x)$ を満たす $F(x)$ を用いると $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ が成り立つ。定積分では積分定数 C を付けても $F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$ となり消えるため、最初から付けなくてよい。





模範解答

(1) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

【C が消える理由】
原始関数を $F(x) + C$ と置いても

$$\bigl(F(b){+}C\bigr) - \bigl(F(a){+}C\bigr) = F(b) - F(a)$$

のように C が相殺される。だから定積分を計算する際は最初から C を省いてよい。

【ブラケット記法の意味】
$[F(x)]_a^b$ は「$x = b$ での値から $x = a$ での値を引く」操作を表す省略記号。
上端 b が先、下端 a が後の引き算に注意。

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = \bigl[x^3 - x^2 + x\bigr]_0^2$$

$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (0^3 - 0^2 + 0)$$

$$= (8 - 4 + 2) - 0 = 6$$

(2) $\int_{-1}^{2}(x^2-x)\,dx$

【負の値の代入に注意】
$x=-1$ を代入するとき、奇数乗は負のまま（$(-1)^3=-1$）、偶数乗は正（$(-1)^2=1$）になる。符号を丁寧に処理する。

【分数の計算】
通分して計算する。$\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{6}\right)$ は「引く負数 = 足す正数」に直してから通分する。

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$\int_{-1}^{2}(x^2-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$

上端 $x=2$ の代入：

$$\frac{8}{3}-\frac{4}{2}=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$$

下端 $x=-1$ の代入：

$$\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^{2}(x^2-x)\,dx=\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

(3) $\int_{-2}^{1}(2x+1)\,dx$

【定積分が 0 になる場合】
定積分の値が 0 であることは、$f(x)$ が恒等的に 0 ということではない。
$-2 \leq x \leq 1$ において、負の部分と正の部分の面積が打ち消し合うと定積分が 0 になる。
$y = 2x+1$ の零点は $x = -\frac{1}{2}$。

- $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ では $f(x) < 0$
- $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ では $f(x) > 0$

定積分 $= 0$ は「面積が 0」を意味しない。面積を求めるには区間分割して絶対値を取る必要がある（別の教材で扱う）。

$$\int_{-2}^{1}(2x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_{-2}^{1}$$

上端 $x=1$ の代入：

$$1^2+1=2$$

下端 $x=-2$ の代入：

$$(-2)^2+(-2)=4-2=2$$

$$\int_{-2}^{1}(2x+1)\,dx = 2-2=0$$

統合教材：積分—定積分の性質（区間加法性・偶奇関数）

統合教材

トピック: 区間加法性、偶関数・奇関数の定積分、定積分の線形性難易度: 標準

問題

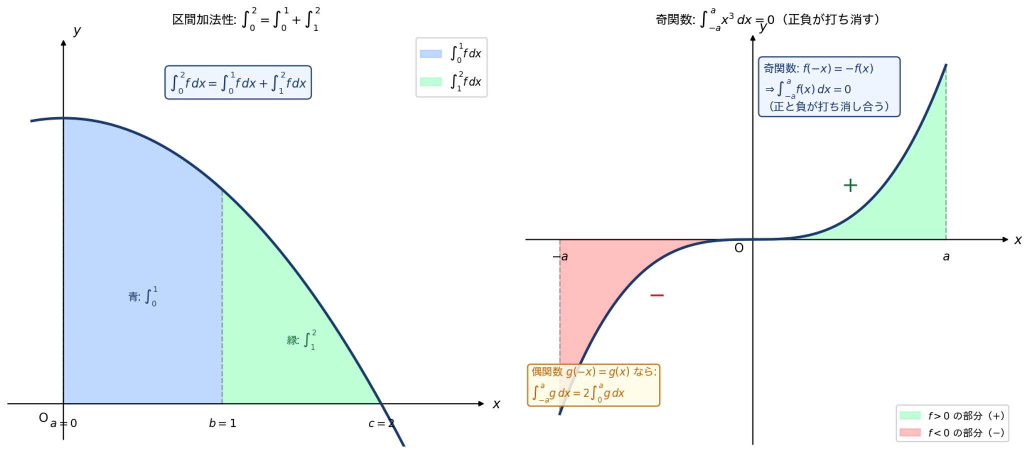
次の定積分を求めよ。
(1) $\int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx$
(2) $\int_{-2}^{2}(x^2+3)\,dx$
(3) $\int_0^1 f(x)\,dx=2$、$\int_1^3 f(x)\,dx=5$ のとき、$\int_0^3 f(x)\,dx$ を求めよ。

解法の流れ

- 被積分関数が奇関数かどうかを判定する（奇関数なら対称区間での定積分は 0）
- 被積分関数が偶関数かどうかを判定する（偶関数なら $\int_{-a}^{a}=2\int_0^a$）
- 区間加法性 $\int_a^c f\,dx=\int_a^b f\,dx+\int_b^c f\,dx$ を使う

方針

定積分の性質を使うと計算量を大幅に減らせる。関数の対称性（偶奇）と面積の加法性を、グラフのイメージと結びつけて理解することが重要。



模範解答

(1) $\int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx$

【奇関数と定積分が 0 になる理由】

奇関数 $f(-x)=-f(x)$ のグラフは原点に関して点対称である。

$-a \le x \le 0$ でのグラフは $0 \le x \le a$ のグラフを原点対称に移したもので、面積の値が等しく符号が逆になる。

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

よって合計するとちょうど 0 になる。

【直接計算との比較】

直接計算しても確認できる：

$$\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = 0$$

性質を使った方が速い。

被積分関数 $f(x)=x^3+x$ について：

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-f(x)$$

よって $f(x)$ は奇関数。奇関数の対称区間 $-a \le x \le a$ での定積分は 0 なので、

$$\int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx = 0$$

(2) $\int_{-2}^{2}(x^2+3)\,dx$

【偶関数と 2 倍の理由】
偶関数 $g(-x)=g(x)$ のグラフは y 軸に関して線対称である。
したがって $-a \leq x \leq 0$ と $0 \leq x \leq a$ の面積は等しく、

$$\int_{-a}^{0} g(x)\,dx = \int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

が成り立つ。これにより $\int_{-a}^{a} = 2\int_{0}^{a}$ となる。
計算量が半分に減るうえ、負の値の代入が不要になるため、計算ミスも減る。

被積分関数 $g(x)=x^2+3$ について：

$$g(-x)=(-x)^2+3=x^2+3=g(x)$$

よって $g(x)$ は偶関数。偶関数の対称区間での定積分は

$$\int_{-2}^{2}(x^2+3)\,dx = 2\int_{0}^{2}(x^2+3)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^2 = 2\left(\frac{8}{3}+6\right) = 2\cdot\frac{26}{3} = \frac{52}{3}$$

(3) 区間加法性を使って $\int_0^3 f(x)\,dx$ を求める

【区間加法性の意味】

定積分は「符号付き面積」であり、区間を分割して足し合わせることができる。

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$$

これは b が a と c の間にある場合だけでなく、一般の b に対しても成り立つ。

【逆向きの利用例】

$\int_0^3 f\,dx$ と $\int_0^1 f\,dx$ が分かれば

$$\int_1^3 f\,dx = \int_0^3 f\,dx - \int_0^1 f\,dx$$

と求めることもできる。

区間加法性より

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$$

与えられた条件を代入すると

$$= 2 + 5 = 7$$

統合教材：積分—定積分と文字（上端に文字を含む場合）

統合教材

トピック: 上端・係数に文字が含まれる定積分の計算・条件方程式難易度: 標準

問題

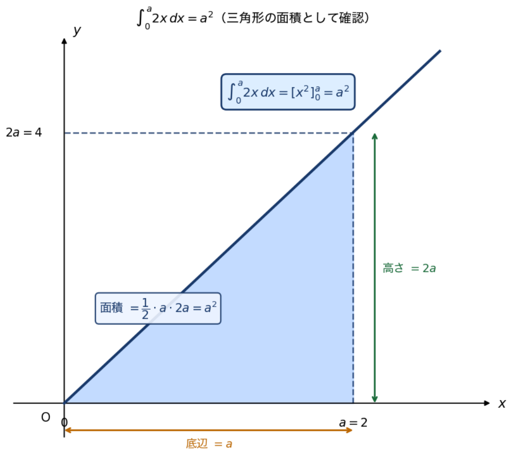
(1) $\int_0^a (3x^2 - 2x)\, dx = 8$ となる $a > 0$ を求めよ。
(2) $\int_0^1 (x+k)^2\, dx$ を k で表せ。

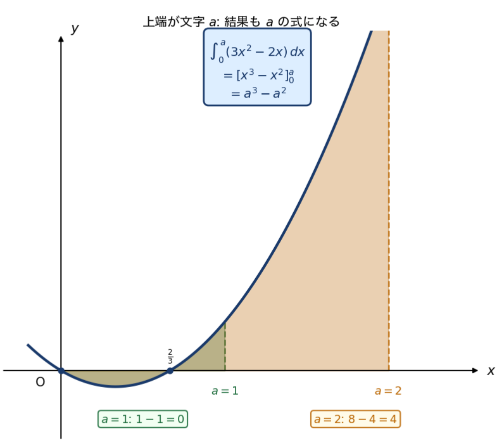
解法の流れ

- 上端または係数に文字が含まれていても、通常通り積分を実行して $F(b) - F(a)$ を計算する
- 結果が文字の式（多項式）になる
- 条件が与えられた場合は方程式を立てて文字を求める
- 条件なしで「表せ」と言われた場合は式を整理して答える

方針

文字が含まれていても積分の手順は変わらない。「x について積分する」のであれば、a, k などの文字は定数として扱う。計算後に文字の方程式や式が得られる。





模範解答

(1) $\int_0^a (3x^2 - 2x)\,dx = 8$ となる $a > 0$ を求めよ

【文字が上端にある場合の手順】
$\int_0^a f(x)\,dx$ を計算するとき：

- x が積分変数、a は定数
- 積分の結果は a の多項式になる
- 条件 $= k$ が与えられたら方程式を立てて a を求める

【有理根定理の使い方】
整数係数の多項式の有理数の解は、定数項の約数 ÷ 最高次係数の約数の形に限られる。
本問の $a^3 - a^2 - 8$ では最高次係数が 1 なので､整数解の候補は $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ のみ。いずれも解でないことが確認できた。

【単調性で解の個数を確定】
$h'(a) > 0$ により $a > 0$ で単調増加なので、解はちょうど 1 つ。

【積分の計算】

$$\int_0^a (3x^2 - 2x)\,dx = \left[x^3 - x^2\right]_0^a$$

$$= (a^3 - a^2) - (0 - 0) = a^3 - a^2$$

【条件を立てる】

$$a^3 - a^2 = 8$$

$$a^3 - a^2 - 8 = 0$$

【有理根を探す（有理根定理）】
定数項の約数：$\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

- $a = 2$: $8 - 4 - 8 = -4 \neq 0$
- $a = -1$: $-1 - 1 - 8 = -10 \neq 0$

整数有理根はない。
【解の存在確認】
$h(a) = a^3 - a^2 - 8$ とおく。

- $h(2) = 8 - 4 - 8 = -4 < 0$
- $h(3) = 27 - 9 - 8 = 10 > 0$

(2) $\int_0^1 (x+k)^2\,dx$ を k で表せ

【k を定数として扱う】
x について積分しているので、k は定数扱い。

- $\int_0^1 2kx\,dx = 2k \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2k \cdot \frac{1}{2} = k$
- $\int_0^1 k^2\,dx = k^2 \cdot [x]_0^1 = k^2$

【結果の検証】
$k = 0$ のとき:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

公式に $k = 0$ を代入すると $0+0+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ✓
答え $k^2 + k + \frac{1}{3}$ は k の 2 次関数であり、k の値によって定積分の値が変わることを示している。

【展開】

$$(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

【積分】

$$\int_0^1 (x^2 + 2kx + k^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + kx^2 + k^2x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} + k + k^2\right) - 0$$

$$= k^2 + k + \frac{1}{3}$$