# 二次関数の最大値・最小値

## 統合教材パック（全 4 問）

**このパックで身につけること**

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

## 収録問題

| 問題 | 区間・軸の設定 | 難易度 |
|---|---|---|
| 問 1：最小値（固定区間） | 区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース | 標準 |
| 問 2：最大値（固定区間） | 区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース | 標準 |
| 問 3：最小値（動く区間） | 区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース | 応用 |
| 問 4：最大値（動く区間） | 区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース | 応用 |

## 使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

# 統合教材：積分—x 軸との面積（符号と区間分割）

統合教材

トピック: Step1= 交点確認 Step2= 符号確認 Step3= 区間ごとに定積分の絶対値 Step4= 合算難易度: 標準

## 問題

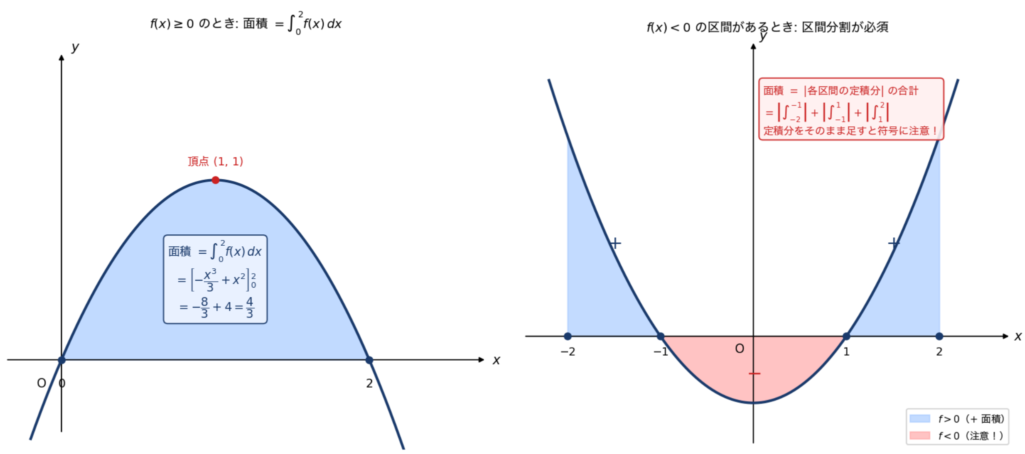
次の面積を求めよ。
(1) $y = x^2 - 1$ と $x$ 軸の間の面積（$-1 \leq x \leq 2$ の範囲）
(2) $y = x^3 - x$ と $x$ 軸の間の面積（$y \neq 0$ の全区間）
(3) $y = x^2 - 3x$ と $x$ 軸の間の面積（$0 \leq x \leq 3$ の範囲）

## 解法の流れ

- Step 1: $f(x) = 0$ を解いて $x$ 軸との交点を求める
- Step 2: 各区間で $f(x)$ の符号を確認する
- Step 3: 各区間で定積分を計算し、符号が負なら絶対値（マイナスを掛ける）を取る
- Step 4: 各区間の面積を合算する

## 方針

面積は「符号付き面積（定積分）」の絶対値の和である。定積分の値が負になる区間では、面積は $-\int f\,dx$ で計算される。交点を求めて区間分割し、各区間での符号を必ず確認してから積分する。



## 模範解答

### (1) $y = x^2 - 1$ と $x$ 軸の間の面積（$-1 \leq x \leq 2$ の範囲）

**【なぜ区間を分割するか】**
$\int_{-1}^{2}(x^2-1)\,dx$ をそのまま計算すると

$$\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{3}-\frac{2}{3} = 0$$

となり、面積が 0 にはならない（面積は正）。
$-1 \leq x \leq 1$ で $f < 0$ なので定積分は負の値になる。
$1 \leq x \leq 2$ の正の部分と打ち消し合ってしまう。
面積を正しく求めるには、符号が変わる点（交点）で区間を分割し、$f < 0$ の区間では $-\int f\,dx$ を使う。

### Step 1: 交点を求める

$$x^2-1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1,\ 1$$

範囲 $-1 \leq x \leq 2$ 内の分割点: $x = -1,\ 1,\ 2$

### Step 2: 各区間の符号を確認

- $-1 < x < 1$: $f(0) = -1 < 0$
- $1 < x < 2$: $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 1 > 0$

### Step 3: 各区間で積分

$-1 \leq x \leq 1$（$f < 0$）：

$$-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1} = -\left[\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right] = -\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$1 \leq x \leq 2$（$f > 0$）：

$$\int_{1}^{2}(x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2} = \left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

### Step 4: 合算



$$S = \frac{4}{3}+\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

### (2) $y = x^3 - x$ と $x$ 軸の間の面積（$y \neq 0$ の全区間）

**【奇関数の対称性の活用】**
$f(x) = x^3 - x$ は奇関数（$f(-x) = -f(x)$）であり、グラフは原点に関して点対称。
したがって $-1 \leq x \leq 0$ の面積と $0 \leq x \leq 1$ の面積は等しく、

$$S = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

と求めることもできる。ただし面積の対称性を使う場合も、必ず「符号の確認」は省略しない。どちらの区間で $f > 0$ かを確認してから対称性を使う。

**Step 1: 交点を求める**

$$x^3 - x = 0 \implies x(x^2-1) = 0 \implies x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = -1,\ 0,\ 1$$

**Step 2: 各区間の符号を確認**

- $-1 < x < 0$: $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} > 0$
- $0 < x < 1$: $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} < 0$

**Step 3: 各区間で積分**

$-1 \leq x \leq 0$（$f > 0$）：

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$0 \leq x \leq 1$（$f < 0$）：

$$-\int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

**Step 4: 合算**

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

### (3) $y = x^2 - 3x$ と $x$ 軸の間の面積（$0 \leq x \leq 3$ の範囲）

**【区間全体で f $\leq$ 0 の場合】**
交点が区間の両端にあり、内部に符号変化がない場合は区間分割が不要。
ただし $f \leq 0$ であることを Step 2 で確認してから、面積 $= -\int f\,dx$ を計算する。
**【計算の確認】**

$$\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{27}{2} = 9 - \frac{27}{2} = -\frac{9}{2}$$

負の値になっている（曲線が $x$ 軸の下側にある）ことと一致。面積はその絶対値で $\frac{9}{2}$。

**Step 1: 交点を求める**

$$x^2 - 3x = 0 \implies x(x-3) = 0 \implies x = 0,\ 3$$

範囲 $0 \leq x \leq 3$ 内の分割点: $x = 0,\ 3$（端点のみ）

**Step 2: 各区間の符号を確認**

- $0 < x < 3$: $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} < 0$

区間全体で $f(x) \leq 0$。

**Step 3: 積分（f < 0 なのでマイナスを掛ける）**

$$S = -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= -\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - 0\right] = -\left(9 - \frac{27}{2}\right) = -\left(-\frac{9}{2}\right)$$

**Step 4: 面積**

$$S = \frac{9}{2}$$

# 統合教材：積分—2 曲線の間の面積

統合教材

トピック: 交点での区間分割・上下判定・$\int(f-g)\,dx$ の合算難易度: 標準

## 問題

次の面積を求めよ。

(1) $y=x^2$ と $y=x+2$ の間の面積

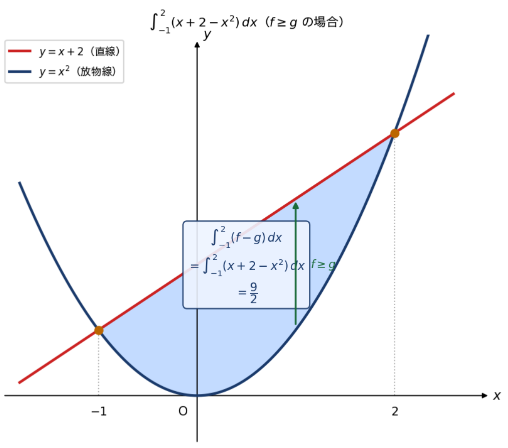
(2) $y=x^3$ と $y=x$ の間の面積（$-1\leq x\leq 1$ の範囲）

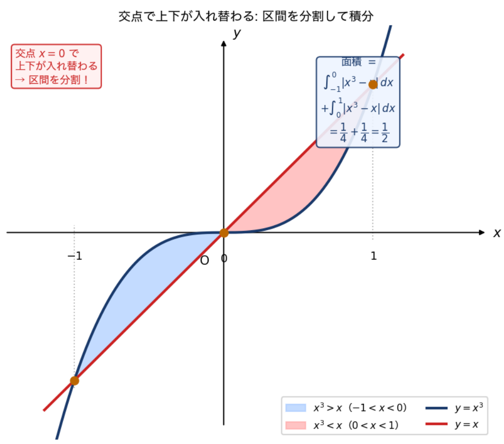
## 解法の流れ

- Step 1: 2 曲線の交点を求める（$f(x)=g(x)$ を解く）
- Step 2: 各区間でどちらが上の曲線かを確認する
- Step 3: 区間ごとに $\int(\text{上}-\text{下})\,dx$ を計算する
- Step 4: 各区間の面積を合算する

## 方針

2 曲線の間の面積は「上の曲線 − 下の曲線」の定積分で求まる。どちらが上かは交点の間の 1 点で値を比較して確認する。交点で上下関係が入れ替わる場合は区間ごとに分割する。



 統合教材

## 模範解答

### (1) $y = x^2$ と $y = x + 2$ の間の面積

**【上の曲線を確認する理由】**
被積分関数 $(x+2) - x^2$ は $-1 < x < 2$ で正（直線が上）。
だから積分値が正になり、そのまま面積に等しい。
もし逆に $\int (x^2 - (x+2))\, dx$ と計算すると負の値が出て、面積として正しくない。
**【確認方法】**
交点の間の任意の 1 点（例えば $x = 0$）で両方の値を計算し、どちらが大きいかを比べるのが最も確実。

**Step 1: 交点を求める**

$$x^2 = x+2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x-2)(x+1) = 0$$

$$x = -1,\ 2$$

**Step 2: 上の曲線を確認**
$x = 0$ で比較: $y = x^2 = 0$、$y = x + 2 = 2$
$-1 < x < 2$ では $y = x + 2$ が上。
**Step 3: 積分を計算**

$$S = \int_{-1}^{2} \left((x+2) - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$x = 2$ の代入:

$$\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} = 2 + 4 - \frac{8}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

$x = -1$ の代入:

$$\frac{1}{2} + (-2) - \frac{-1}{3} = \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}$$

**Step 4: 面積**



$$S = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

**(2)** $y = x^3$ **と** $y = x$ **の間の面積（**$-1 \le x \le 1$ **の範囲）**

**【区間で上下が逆転する場合】**
$x = 0$ で交点があり、ここで上下関係が入れ替わる。単純に $\int_{-1}^{1}(x - x^3)\,dx$ とすると

$$\int_{-1}^{1}(x - x^3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

（奇関数の積分なので 0 になる）。これは面積ではない。交点 $x = 0$ で分割が必須。
**【対称性の活用】**
$f(x) = x^3 - x$ は奇関数なので、グラフは原点対称。
$-1 \le x \le 0$ と $0 \le x \le 1$ の面積が等しいことは対称性から確認できる。

$$S = 2 \times \int_0^1 (x - x^3)\,dx = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ただし「等しい」ことを確認するために Step 2 の符号確認は省略しない。

**Step 1: 交点を求める**

$$x^3 = x \implies x^3 - x = 0 \implies x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = -1,\ 0,\ 1$$

**Step 2: 各区間の上の曲線を確認**
区間 $(-1, 0)$: $x = -\frac{1}{2}$ で比較

- $y = x^3 = -\frac{1}{8}$
- $y = x = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$ なので $y = x^3$ が上。
区間 $(0, 1)$: $x = \frac{1}{2}$ で比較

- $y = x^3 = \frac{1}{8}$
- $y = x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$ なので $y = x$ が上。
**Step 3: 各区間で積分**
$-1 \le x \le 0$（$x^3$ が上）：

# 統合教材：積分—面積公式（1/6 公式・$\alpha$-$\beta$ 公式）

統合教材

トピック: 1/6 公式の導出と適用条件・$(x-\alpha)(x-\beta)$ 形の面積難易度: 標準

## 問題

次の面積を 1/6 公式を用いて求めよ。

(1) $y = x^2 - 3x + 2$ と $x$ 軸の間の面積

(2) $y = x^2$ と $y = x + 2$ の間の面積

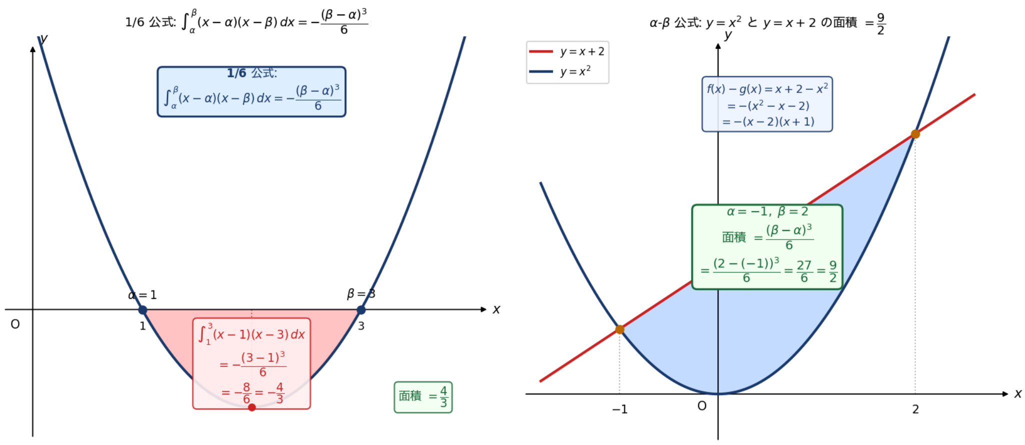
(3) $y = x^2 - x - 6$ と $x$ 軸の間の面積

## 解法の流れ

- 被積分関数（または差）が $(x-\alpha)(x-\beta)$ の形に因数分解できるか確認する（適用条件）
- 適用条件が満たされれば $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ を使う
- 面積は $\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ で求まる（符号が正になることに注意）

## 方針

1/6 公式は「$(x-\alpha)(x-\beta)$ の形の積分」から自動的に導かれる公式であり、適用条件を満たせば計算量を大幅に削減できる。公式の導出を一度確認しておくと、適用条件を覚えやすい。



## 模範解答

### (1) $y = x^2 - 3x + 2$ と $x$ 軸の間の面積

**【1/6 公式の導出】**
$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$ を直接計算する。
置換 $t = x - \alpha$ とすると $x - \beta = t - (\beta - \alpha)$ で、
積分区間は $0 \leq t \leq \beta - \alpha$。

$$\int_0^{\beta-\alpha} t\bigl(t - (\beta-\alpha)\bigr)\,dt$$

$$= \int_0^{\beta-\alpha} \bigl(t^2 - (\beta-\alpha)t\bigr)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{(\beta-\alpha)t^2}{2}\right]_0^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{3} - \frac{(\beta-\alpha)^3}{2}$$

$$= (\beta-\alpha)^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

よって $\alpha \leq x \leq \beta$ では $(x-\alpha)(x-\beta) \leq 0$ なので

$$S = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

**適用条件の確認**

$$y = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$(x-\alpha)(x-\beta)$ の形（$\alpha = 1, \beta = 2$） ✓

**1/6 公式の適用**

$$S = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} = \frac{(2-1)^3}{6} = \frac{1}{6}$$

### (2) $y = x^2$ と $y = x + 2$ の間の面積

**【2 曲線への 1/6 公式の拡張】**
2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の間の面積で、差 $f(x) - g(x)$ が

$$f(x) - g(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (a < 0)$$

の形のとき、$\alpha \leq x \leq \beta$ での面積は

$$S = \int_\alpha^\beta \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = -a \cdot \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

本問では $f(x) - g(x) = (x+1)(x-2)$ ($a = 1$)。
上下を入れ替えた差は $(x+2) - x^2 = -(x+1)(x-2)$ ($a = -1$ に対応)。

$$S = -(-1) \cdot \frac{3^3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

**適用条件の確認**
上の曲線と下の曲線の差を求める。交点は

$$x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x-2)(x+1) = 0$$

$$x = -1,\ 2$$

差 $x^2 - (x+2) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$
これは $(x - \alpha)(x - \beta)$ の形 ($\alpha = -1, \beta = 2$) ✓
ただし $-1 < x < 2$ では直線 $y = x + 2$ が上なので、

$$(\text{上}) - (\text{下}) = (x+2) - x^2 = -(x-2)(x+1) = -(x+1)(x-2)$$

これは $-1 < x < 2$ で正 (面積の計算に使える)。
**1/6 公式の適用**

$$S = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = \frac{(2 - (-1))^3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

### (3) $y = x^2 - x - 6$ と $x$ 軸の間の面積

**【1/6 公式の使い方まとめ】**
適用条件: 被積分関数（または 2 曲線の差）が

$$(x-\alpha)(x-\beta) \quad \text{または} \quad -(x-\alpha)(x-\beta)$$

の形に因数分解できること。
公式:

$$S = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

**【適用できない場合】**
係数が 1 でない場合（例: $2(x-1)(x-3)$）は

$$S = \frac{|a| \cdot (\beta-\alpha)^3}{6}$$

のように係数の絶対値を掛ける（$a(x-\alpha)(x-\beta)$ の場合）。
**【1/6 公式の本質】**
この公式は置換積分の計算結果であり、「被積分関数が 2 次の $(x-\alpha)(x-\beta)$ 型」という条件のもとで成り立つ。3 次以上には直接使えない。

**適用条件の確認**

$$y = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$(x-\alpha)(x-\beta)$ の形（$\alpha = -2, \beta = 3$）✓
交点: $x = -2, 3$
$-2 < x < 3$ では $y = (x-3)(x+2) < 0$（$x$ 軸の下側）✓

**1/6 公式の適用**

$$S = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} = \frac{(3-(-2))^3}{6} = \frac{5^3}{6} = \frac{125}{6}$$

【検証: 直接計算】

$$S = -\int_{-2}^{3} (x-3)(x+2)\,dx = -\int_{-2}^{3} (x^2-x-6)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{3}$$