統合教材：指数関数例題 1

統合教材

トピック: 底をそろえて解く指数方程式と不等式難易度: 標準

問題

次の方程式・不等式を解け。
(1) $4^{x+1} = 8^x$
(2) $9^x \leq 27^{x-1}$

解法の流れ

- 底をすべて同じ数の累乗に変形する（(1) は底 2、(2) は底 3）
- 底が同じになれば指数を直接比べられる
- (2) では底 $3 > 1$ なので不等号の向きはそのまま

方針

指数方程式・不等式では、**底を同じ数に統一する**ことが出発点である。底をそろえると、$a^p = a^q \implies p = q$（底 $a > 0, a \neq 1$ のとき）が使えて、指数の等式・不等式に帰着できる。不等式では底が 1 より大きいか小さいかで不等号の向きが決まる。

模範解答

(1) $4^{x+1} = 8^x$

【底をそろえると指数が比べられる】
$y = 2^x$ は単射（異なる x には異なる y が対応する）。したがって $2^p = 2^q \implies p = q$ が成立する。
4 と 8 はともに 2 の累乗なので、底を 2 に統一できる。

$4 = 2^2, \quad 8 = 2^3$ を利用して底を 2 に統一する。

$$(2^2)^{x+1} = (2^3)^x$$

$$2^{2x+2} = 2^{3x}$$

底が同じなので指数を等置する。

$$2x + 2 = 3x$$

$$\boxed{x = 2}$$

(2) $9^x \leq 27^{x-1}$

【底の大きさと不等号の向き】
底 $a > 1$ のとき $y = a^x$ は単調増加なので、

$$a^p \leq a^q \iff p \leq q$$

底 $0 < a < 1$ のとき単調減少なので不等号が逆転する（例題 3 参照）。

$9 = 3^2$, $27 = 3^3$ を利用して底を 3 に統一する。

$$(3^2)^x \leq (3^3)^{x-1}$$

$$3^{2x} \leq 3^{3x-3}$$

底 $3 > 1$ なので $y = 3^x$ は単調増加。よって不等号の向きはそのまま。

$$2x \leq 3x - 3$$

$$-x \leq -3$$

$$\boxed{x \geq 3}$$

統合教材：指数関数例題 2

統合教材

トピック: 置換を使う指数方程式難易度: 標準

問題

方程式 $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ を解け。

解法の流れ

- $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ と変形して $t = 2^x$ と置換する
- t についての二次方程式を解く
- $t = 2^x > 0$ の条件を確認してから x を求める

方針

4^x を 2^x の 2 乗で表すと、方程式は $t = 2^x$ を用いた二次方程式になる。置換後は通常の二次方程式の解法が使えるが、$t = 2^x > 0$ という制約条件を最後に確認することが重要である。

模範解答

【置換の目的：次数を下げる】
$4^x = (2^x)^2$ なので、$t = 2^x$ とおくと方程式の次数が 2 から下がり、扱いやすくなる。
$t = 2^x$ は任意の実数 x に対して $t > 0$ であることに注意。負の解（$t < 0$）や零の解（$t = 0$）は元の方程式に対応する x が存在しないため排除する。
今回は $t = 1$ も $t = 4$ もともに正なので、どちらも有効。

$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ より、$t = 2^x$ $(t > 0)$ とおくと

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

因数分解すると

$$(t-1)(t-4) = 0$$

$$t = 1 \quad \text{または} \quad t = 4$$

$t > 0$ を両方とも満たすので、それぞれ x に戻す。

- $2^x = 1 = 2^0 \implies x = 0$
- $2^x = 4 = 2^2 \implies x = 2$

$$\boxed{x = 0, \quad x = 2}$$

統合教材：指数関数例題 3

統合教材

トピック: 底が 0<a<1 のとき不等号が逆転する指数不等式難易度: 標準

問題

不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$ を解け。

解法の流れ

- 右辺の底 $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ を利用して底を $\frac{1}{3}$ に統一する
- 底が $0 < \frac{1}{3} < 1$ なので $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ は単調減少
- 単調減少なので不等号の向きが逆転する

方針

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいので、$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ は単調減少である。このとき、底をそろえた後に指数を比べると不等号の向きが逆転する。グラフで確認すると、x が大きくなるほど y の値が小さくなることから直感的に理解できる。

模範解答

【底が 0<a<1 では不等号が逆転する】
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフは右下がり（単調減少）。

$$\left(\frac{1}{3}\right)^p<\left(\frac{1}{3}\right)^q \iff p>q$$

これは「小さい y の値ほど大きい x に対応する」という単調減少の性質による。底 $a>1$ では同じ不等号の向き、底 $0<a<1$ では逆の不等号の向きになる（例題 1 参照）。

$\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$ より底を $\frac{1}{3}$ に統一する。

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}<\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{x-2}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-2)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-4}$$

底 $\frac{1}{3}$ は $0<\frac{1}{3}<1$ なので $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ は**単調減少**。
よって不等号の向きが逆転する。

$$x-1>2x-4$$

$$-x>-3$$

$$\boxed{x<3}$$