二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：微分—接線の方程式

統合教材

トピック: 接線の方程式（接点での傾き確定 + 点-傾き形で直線を決定）難易度: 標準

問題

次の各関数について、指定した点での接線の方程式を求めよ。

(1) $f(x) = x^3 - 3x$ の $x = 2$ での接線

(2) $f(x) = x^2 - 2x$ の $x = -1$ での接線

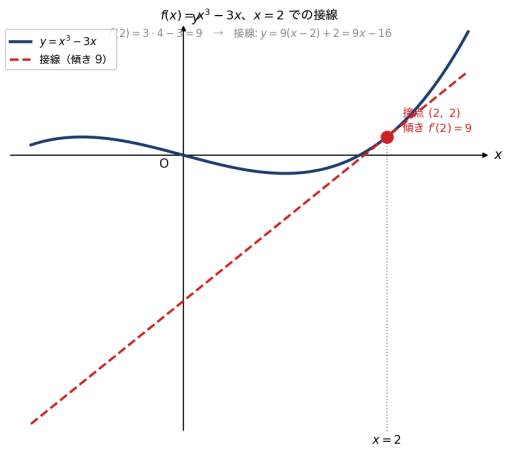
(3) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ の $x = 1$ での接線

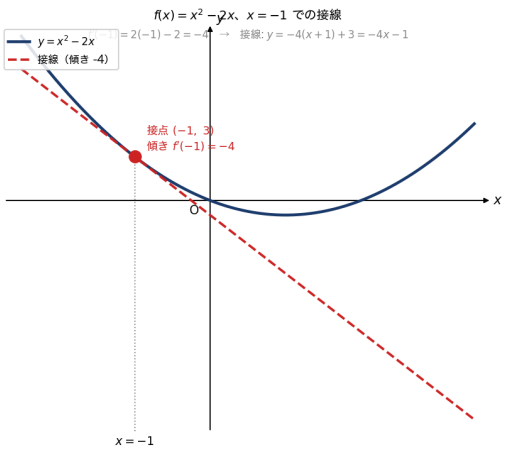
解法の流れ

- 接点の座標 $(a,\ f(a))$ を求める
- 導関数 $f'(x)$ を計算し、$f'(a)$ = 接線の傾きを確定する
- 点 $(a,\ f(a))$ を通り傾き $f'(a)$ の直線: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

方針

接線の方程式の公式 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ を使う。各要素の意味: $f'(a)$ は差商の極限として確定した傾き、$(a, f(a))$ は曲線上の接点。この 2 条件で直線は 1 本に決まる。





模範解答

(1) $f(x) = x^3 - 3x$、$x = 2$ での接線

【なぜこの公式で接線が決まるか】
接線は「接点で曲線に接触する直線」。
「接触」とは、接点での傾きが一致すること。
$f'(a)$ はその点での曲線の傾きを確定させる。
点 $(a, f(a))$ が接点なので、直線は 1 本に決まる。
$f'(2) = 9 \to$ 「$x = 2$ で急激に増加中」という情報が接線の角度に反映される。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$x = 2$ での値:

$$f(2) = 8 - 6 = 2, \quad f'(2) = 12 - 3 = 9$$

接線: $y - 2 = 9(x - 2)$

$$y = 9x - 16$$

(2) $f(x) = x^2 - 2x$、$x = -1$ **での接線**

【傾きが負の場合の確認】
$f'(-1) = -4$ は「$x = -1$ で急激に減少中」を意味する。
$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ と平方完成すると頂点は $(1, -1)$ で、
$x = -1$ は頂点より左の減少域 → 傾き負は整合的。
接線 $y = -4x - 1$ を検証: $x = -1$ を代入すると $y = 4 - 1 = 3 = f(-1)$ ✓

$$f'(x) = 2x - 2$$

$x = -1$ での値:

$$f(-1) = 1 + 2 = 3, \quad f'(-1) = -2 - 2 = -4$$

接線: $y - 3 = -4(x + 1)$

$$y = -4x - 1$$

(3) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$、$x = 1$ **での接線**

【手順の確認】

手順	計算	意味
接点の y 座標	$f(1) = 2$	曲線上の点
接線の傾き	$f'(1) = 4$	その点での曲線の
直線の方程式	$y - 2 = 4(x - 1)$	点-傾き形

接線を整理すると $y = 4x - 2$ となる。
$x = 0$ を代入すると $y = -2$（y 切片）。

$$f'(x) = 6x^2 - 2x$$

$x = 1$ での値:

$$f(1) = 2 - 1 + 1 = 2, \quad f'(1) = 6 - 2 = 4$$

接線: $y - 2 = 4(x - 1)$

$$y = 4x - 2$$

統合教材：微分—曲線外の点からの接線

統合教材

トピック: 曲線外の点からの接線（接点を未知数として方程式を立てる）難易度: 標準〜やや難

問題

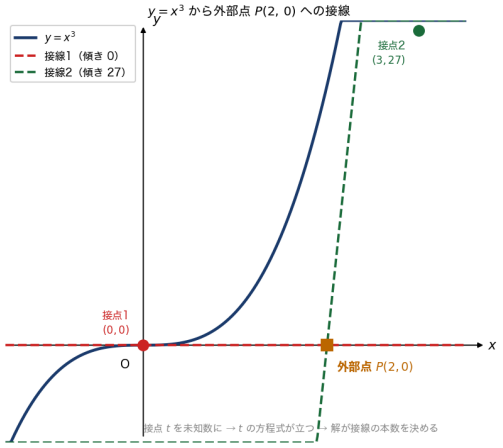
次の各曲線について、指定した点から引ける接線の方程式をすべて求めよ。
(1) 曲線 $y = x^2$ に、点 $(1, -1)$ から引く接線
(2) 曲線 $y = x^3$ に、点 $(2, 0)$ から引く接線

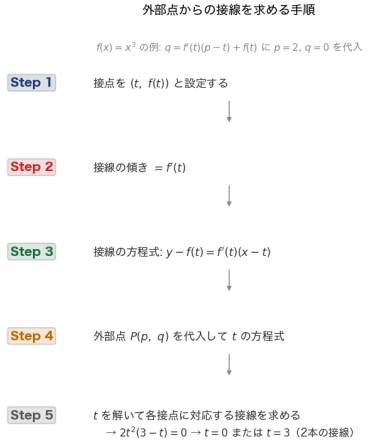
解法の流れ

- 接点を $(t,\ f(t))$ と設定する（t は未知数）
- 傾き $= f'(t)$ と、外部点を通る条件の 2 つから t の方程式を立てる
- t を解いて各接点に対応する接線を求める

方針

「接線が通る点 = 曲線上の接点」とは限らない。外部点 P から引く接線では、接点 $(t, f(t))$ は曲線上だが、P は曲線上にない。傾きの一致条件と通過条件の 2 条件で t の方程式が立つ。





模範解答

(1) $y = x^2$、点 $(1,\,-1)$ からの接線

【なぜ接点を t とおくか】
外部点からの接線問題は「どの点に接するか」が未知。
接点を $(t, f(t))$ として未知数化すると、

- 傾きの条件: 傾き $= f'(t)$
- 通過条件: 外部点を接線に代入

の 2 条件から t の方程式が立ち、解の数 = 接線の本数になる。
$t^2 - 2t - 1 = 0$ の判別式 $D = 4 + 4 = 8 > 0$ なので 2 本の接線が存在する。

接点を $(t,\,t^2)$ とおく。
$f'(x) = 2x$ より接線の傾き $= 2t$。
接線の方程式:

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \Longrightarrow \quad y = 2tx - t^2$$

点 $(1,\,-1)$ を代入:

$$-1 = 2t \cdot 1 - t^2 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$

接線の方程式（2 本）:

$$y = 2(1+\sqrt{2})\,x - (1+\sqrt{2})^2 = 2(1+\sqrt{2})\,x - (3+2\sqrt{2})$$

$$y = 2(1-\sqrt{2})\,x - (1-\sqrt{2})^2 = 2(1-\sqrt{2})\,x - (3-2\sqrt{2})$$

(2) $y = x^3$**、点** $(2,\,0)$ **からの接線**

【$t = 0$ で傾き 0 になる理由】
$f(x) = x^3$ の $x = 0$ は変曲点で、$f'(0) = 0$。
接線は水平（$y = 0$）で x 軸そのもの。
外部点 $(2, 0)$ は x 軸上にあるので確かに通る。
$t = 3$ の接線 $y = 27x - 54$: $x = 2$ で $y = 54 - 54 = 0 \to$ 点 $(2, 0)$ を通る ✓
等号が「等しい」と「等しくない」の境界:
$2t^2(3 - t) = 0$ の因数分解が重要で、$t = 0$ は「接点が原点」、$t = 3$ は「接点が $(3, 27)$」を与える。

接点を $(t,\,t^3)$ とおく。
$f'(x) = 3x^2$ より接線の傾き $= 3t^2$。
接線の方程式:

$$y - t^3 = 3t^2(x - t) \quad \Longrightarrow \quad y = 3t^2x - 2t^3$$

点 $(2,\,0)$ を代入:

$$0 = 3t^2 \cdot 2 - 2t^3 = 6t^2 - 2t^3 = 2t^2(3 - t)$$

$$t = 0 \quad \text{または} \quad t = 3$$

接線の方程式（2 本）:

- $t = 0$: 接点 $(0,\,0)$、傾き $0 \to y = 0$
- $t = 3$: 接点 $(3,\,27)$、傾き $27 \to y = 27x - 54$

統合教材：微分—法線の方程式

統合教材

トピック: 法線の方程式（接線の傾きから直交する法線の傾きを求める）難易度: 標準

問題

次の各関数について、指定した点での法線の方程式を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ の $x = 1$ での法線

(2) $f(x) = x^3$ の $x = 1$ での法線

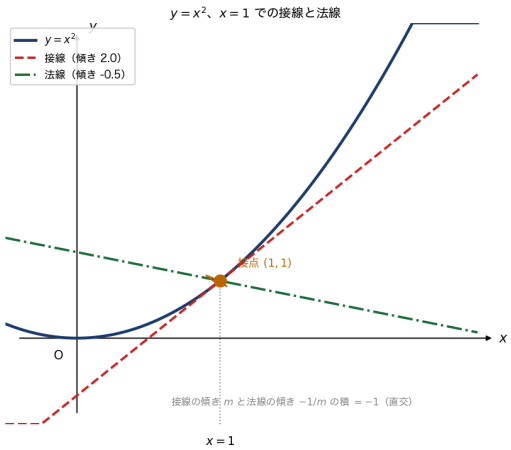
(3) $f(x) = x^3$ の $x = 0$ での法線（特殊ケース）

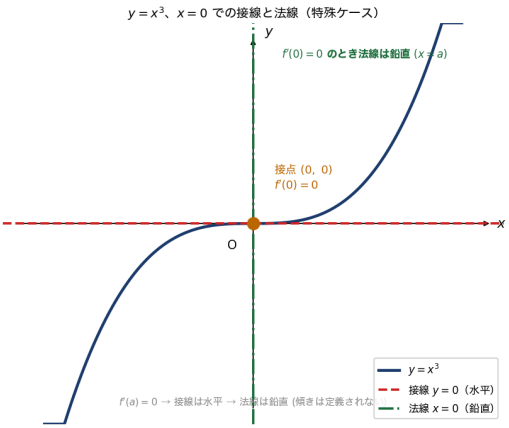
解法の流れ

- 接点 $(a,\ f(a))$ と接線の傾き $m = f'(a)$ を求める
- 法線の傾き $= -\dfrac{1}{m}$（ただし $m \neq 0$）
- 点 $(a,\ f(a))$ を通り傾き $-1/m$ の直線: $y - f(a) = -\dfrac{1}{m}(x - a)$
- $f'(a) = 0$ の場合: 接線が水平 → 法線は鉛直 $x = a$

方針

2 直線が直交する必要十分条件は「傾きの積 $= -1$」。接線の傾き m から法線の傾き $-1/m$ が自動的に決まる。$f'(a) = 0$ の特殊ケースは別扱いが必要。





模範解答

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$、$x = 1$ **での法線**

【$f'(a) = 0$ の特殊ケース】
$f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ の頂点が $(1, 2)$。
頂点では接線が水平（傾き 0）なので、直交する法線は鉛直、すなわち $x = 1$（y 軸と平行な直線）。
「傾きの積 $= -1$」という条件は $m \neq 0$ のときのみ使える。

$$f'(x) = 2x - 2$$

$x = 1$ での値:

$$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2, \quad f'(1) = 2 - 2 = 0$$

$f'(1) = 0$（水平接線）なので、
法線は鉛直: $x = 1$

(2) $f(x) = x^3$、$x = 1$ **での法線**

【直交条件の確認】
接線の傾き 3 と法線の傾き $-1/3$ の積:

$$3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \quad \checkmark$$

接線と法線が直交していることが確認できる。
接点 $(1, 1)$ を法線に代入: $y = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1$ ✓

$$f'(x) = 3x^2$$

$x = 1$ での値:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 3$$

法線の傾き $= -\frac{1}{3}$
法線: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(3) $f(x) = x^3$、$x = 0$ での法線（特殊ケース）

【変曲点での法線】
$f(x) = x^3$ の $x = 0$ は変曲点（極値はないが $f'(0) = 0$）。
接線 $y = 0$ は水平（x 軸）、
法線 $x = 0$ は鉛直（y 軸）。
この場合、接線と法線が座標軸と一致するという特殊な状況になる。
まとめ：法線の傾きの決め方

$f'(a)$	接線の傾き	法線の傾き
$m \neq 0$	m	$-1/m$
$m = 0$	水平 $(y = f(a))$	鉛直 $(x = a)$

$$f'(x) = 3x^2$$

$x = 0$ での値:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

$f'(0) = 0$（水平接線）なので、
法線は鉛直: $x = 0$
（これは y 軸そのものである）