二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：微分—閉区間での最大値・最小値

統合教材

トピック: 閉区間での最大値・最小値（端点と極値の比較）難易度: 標準

問題

次の各関数の、指定した区間での最大値・最小値を求めよ。

(1) $f(x) = x^3 - 3x$ の $0 \leq x \leq 3$

(2) $f(x) = x^3 - 3x$ の $-2 \leq x \leq 2$

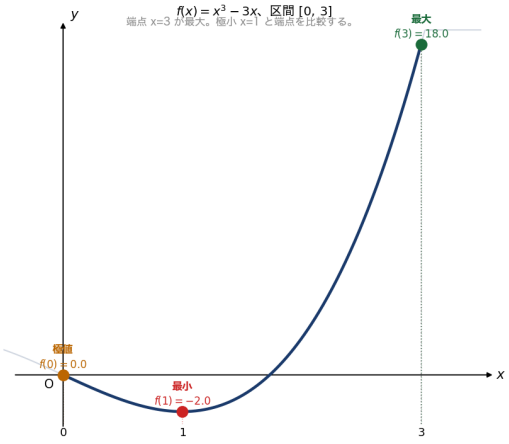
(3) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ の $0 \leq x \leq 4$

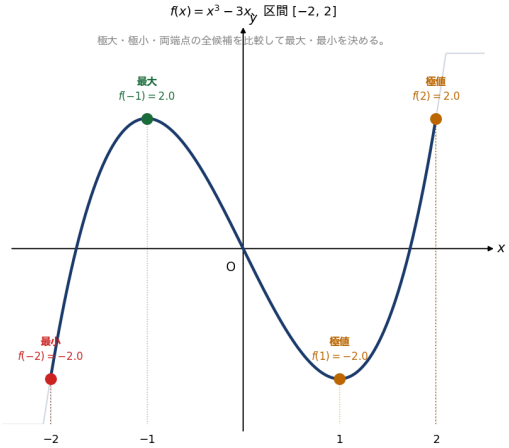
解法の流れ

- 導関数を求め、区間内の極値点を求める
- 候補点（極値点 + 両端点）で関数値を計算する
- 最も大きい値が最大値、最も小さい値が最小値

方針

$a \leq x \leq b$ の閉区間では端点も候補になる。「極値 = 最大値」という先入観を捨て、全候補を比較する。極値点が区間外ならリストから外す。





模範解答

(1) $f(x) = x^3 - 3x$、$0 \leq x \leq 3$

【なぜ端点 $x = 3$ が最大か】
$0 \leq x \leq 3$ で $f(x)$ は $x = 1$ で折り返した後、$x > 1$ では増加し続ける。
右端点 $x = 3$ が区間内で最高点になるのはこのため。
「極大点 $x = -1$ は区間外なので無視」という操作が重要で、区間に含まれない極値点は候補に入れない。

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$0 \leq x \leq 3$ 内の極値点: $x = 1$（$x = -1$ は区間外）
候補点:

x	$f(x)$
0（端点）	0
1（極小）	-2
3（端点）	18

最大値: 18（$x = 3$ **のとき**）
最小値: -2（$x = 1$ **のとき**）

(2) $f(x) = x^3 - 3x$、$-2 \leq x \leq 2$

【最大値が 2 点で達成される理由】
$f(x) = x^3 - 3x$ は奇関数なので原点対称のグラフを持つ。$-2 \leq x \leq 2$ の閉区間も原点対称なので、最大値・最小値ともに対称な 2 点で達成される。
このような対称性に気づくと計算ミスの確認に使える。

極値点 $x = \pm 1$ はどちらも $-2 \leq x \leq 2$ 内。
候補点:

x	$f(x)$
-2（端点）	$-8 + 6 = -2$
-1（極大）	$-1 + 3 = 2$
1（極小）	$1 - 3 = -2$
2（端点）	$8 - 6 = 2$

最大値: 2（$x = -1$ **および** $x = 2$ **のとき**）
最小値: -2（$x = -2$ **および** $x = 1$ **のとき**）

(3) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$、$0 \leq x \leq 4$

【最高次係数が負の場合】
最高次の係数が負（$-x^3$）なので、$x \to +\infty$ で $f \to -\infty$。グラフは「右下がり」で始まり極小・極大の順（(1)(2) の x^3 とは順序が逆）。
増減表で $f'(x)$ の符号が $- \to + \to -$ になることで確認できる。

$f'(x) = -3x^2+12x-9 = -3(x^2-4x+3) = -3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ より $x = 1,\ 3$（どちらも区間内）
増減表:

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

候補点:

x	$f(x)$
0（端点）	2
1（極小）	$-1+6-9+2=-2$
3（極大）	$-27+54-27+2=2$
4（端点）	$-64+96-36+2=-2$

最大値: 2（$x = 0$ **および** $x = 3$ **のとき**）
最小値: -2（$x = 1$ **および** $x = 4$ **のとき**）

統合教材：微分—文字係数を含む最大値・最小値

統合教材

トピック: 文字係数の符号による場合分けと最大値・最小値難易度: やや発展

問題

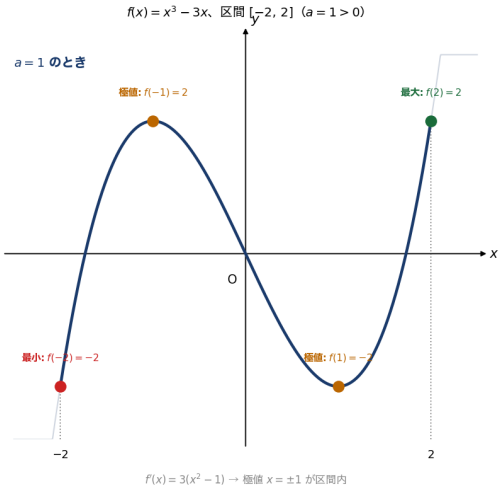
(1) $f(x) = x^3 - 3ax$（a は実数の定数）の $-2 \leq x \leq 2$ での最大値・最小値を求めよ。
(2) $g(x) = -x^3 + 3ax$（a は実数の定数）の $0 \leq x \leq 2$ での最大値を求めよ。

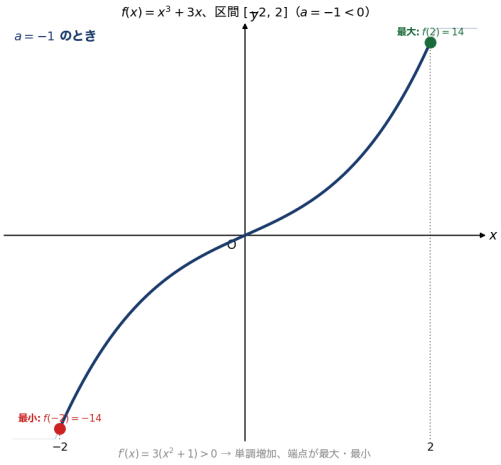
解法の流れ

- $f'(x)$ を求め（文字 a を含んだまま)、$f'(x) = 0$ の解を求める
- a の値によって解が区間内に存在するかどうかが変わる → 場合分けの条件を立てる
- 各ケースで候補点（極値点 + 端点）の関数値を比較する

方針

文字係数が含まれると、極値点の位置が a に依存する。$f'(x) = 3(x^2 - a)$ の零点 $x = \pm\sqrt{a}$ が $-2 \leq x \leq 2$ 内に入るかどうかで場合分けが生じる。境界は $a = 0$ と $a = 4$（$\sqrt{a} = 2$ となるとき)。





模範解答

(1) $f(x) = x^3 - 3ax$、$-2 \leq x \leq 2$

【場合分けの根拠】
境界値の確認:

- $a = 0$: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$（単調増加）
- $a = 4$: $\sqrt{a} = 2$（極値点が端点と一致）

$0 < a < 4$ では $2a\sqrt{a}$ が端点値 $-8+6a$ より大きいことの確認:

$$2a\sqrt{a} - (-8 + 6a) = 2a\sqrt{a} - 6a + 8$$

$t = \sqrt{a}$（$0 < t < 2$）とおくと $= 2t^3 - 6t^2 + 8 = 2(t-2)^2(t+1) > 0$
よって $2a\sqrt{a} > -8+6a$ が確認できる。

$$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$$

場合 1: $a \leq 0$
$x^2 - a \geq 0$ が常に成立 → $f'(x) \geq 0$ → 単調増加。
最大値: $f(2) = 8 - 6a$
最小値: $f(-2) = -8 + 6a$
場合 2: $0 < a < 4$
$x = \pm\sqrt{a}$ が区間 $(-2, 2)$ 内に存在。

$$f(-\sqrt{a}) = -a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} = 2a\sqrt{a} \quad \text{（極大）}$$
$$f(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} = -2a\sqrt{a} \quad \text{（極小）}$$

端点: $f(-2) = -8 + 6a, \quad f(2) = 8 - 6a$
最大値: $2a\sqrt{a}$（極大値が端点より大）
最小値: $-2a\sqrt{a}$（極小値が端点より小）
場合 3: $a \geq 4$
$\sqrt{a} \geq 2$ → 極値点が区間外 → 区間内で $f'(x) \leq 0$ → 単調減少。
最大値: $f(-2) = -8 + 6a$
最小値: $f(2) = 8 - 6a$

(2) $g(x) = -x^3 + 3ax$、$0 \leq x \leq 2$ **での最大値**

【まとめ（場合 2 の境界確認）】
$a = 4$ のとき: $\sqrt{a} = 2$ で端点と極値点が一致。
$g(2) = -8 + 24 = 16 = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$
場合 2 の式と場合 3 の式が $a = 4$ で一致することを確認できる。場合分けの境界で値が連続になっていることは答案の検証に使える。

$$g'(x) = -3x^2 + 3a = -3(x^2 - a)$$

場合 1: $a \leq 0$
$g'(x) = -3(x^2 - a) \leq 0$（$x \geq 0$ で）→ 単調減少。
最大値: $g(0) = 0$
場合 2: $0 < a \leq 4$
$x = \sqrt{a}$ が $(0, 2]$ に存在。$g'(x) > 0$（$0 < x < \sqrt{a}$）、$g'(x) \leq 0$（$x > \sqrt{a}$）→ $x = \sqrt{a}$ で極大。

$$g(\sqrt{a}) = -a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} = 2a\sqrt{a} \quad \text{（最大値）}$$

場合 3: $a > 4$
$\sqrt{a} > 2$ → 極値点が区間外 → 区間内で $g'(x) > 0$ → 単調増加。
最大値: $g(2) = -8 + 6a$