二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：微分—導関数と増減

統合教材

トピック: 導関数の基本公式・増減への利用難易度: 標準

問題

次の関数の導関数を求め、増減を調べよ。

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

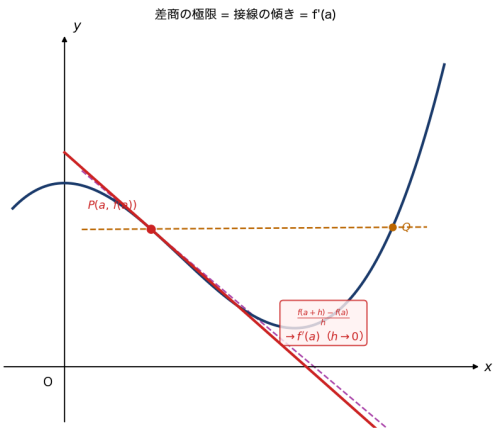
(2) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

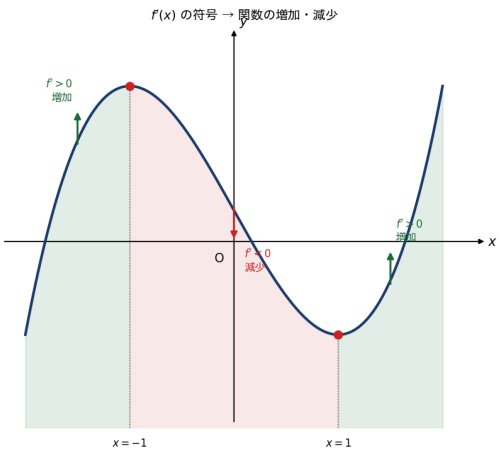
解法の流れ

- 基本公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ で各項を微分する
- $f'(x) = 0$ の解（候補点）を求める
- 候補点の前後で $f'(x)$ の符号を確認する（変化すれば極値、しなければ極値でない）
- 増減表にまとめる

方針

多項式の導関数は各項を独立に微分して足す（線形性）。符号変化の確認は因数分解した $f'(x)$ の各因数の正負を追うと確実。





模範解答

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

【なぜ因数分解するか】
$3(x-1)(x-3)$ の形に変形すると、各因数 $(x-1)$ と $(x-3)$ の符号が x の値に応じて分かる。

- $x < 1$: 両因数が負 → 積は正 → $f'(x) > 0$
- $1 < x < 3$: $(x-1) > 0$、$(x-3) < 0$ → 積は負 → $f'(x) < 0$
- $x > 3$: 両因数が正 → 積は正 → $f'(x) > 0$

これが増減表の根拠。

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ より $x = 1,\ 3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ （極大値）

$f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$ （極小値）

(2) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

【手順のまとめ】
(1) と同じ流れ: 導関数 → 因数分解 → $g'(x) = 0$ の解 → 各区間の符号 → 増減表 → 極値の計算。
符号確認は $x = 0$ などの簡単な値を代入して確かめるとミスが減る:
$x = 0$ で $g'(0) = 6(0-2)(0+1) = -12 < 0$
増減表の $-1 < x < 2$ の区間が $-$ であることと一致している。

$g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$

$g'(x) = 0$ より $x = -1,\ 2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$g(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$ （極大値）

$g(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$ （極小値）

統合教材：微分—増減表と極値の判定

統合教材

トピック: 増減表・極値の判定・f'(c)=0 は必要条件のみ難易度: 標準

問題

次の関数の極値を求めよ。極値がない場合はその理由も答えよ。

(1) $f(x) = x^3 - 3x$

(2) $f(x) = x^3$

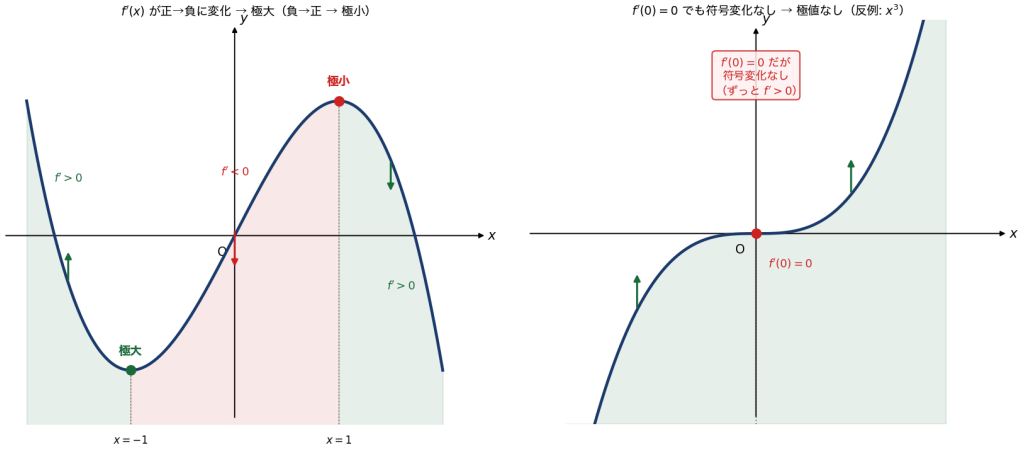
(3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

解法の流れ

- $f'(x)$ を求め、$f'(x) = 0$ の解を求める
- 解の前後で $f'(x)$ の符号が変わるかどうかを確認する
- 符号が $+ \to -$ なら極大、$- \to +$ なら極小、変化なしなら極値でない

方針

$f'(c) = 0$ は極値であるための必要条件だが十分条件でない。x^3 の $x = 0$ のように、$f'(0) = 0$ でも前後で符号が変わらない場合は極値にならない。(3) は $(x-1)^3$ に変形すると x^3 と同じ構造であることが分かる。



模範解答

(1) $f(x) = x^3 - 3x$

【極大と極小の対称性】
$f(x) = x^3 - 3x$ は奇関数（$f(-x) = -f(x)$）なので、グラフは原点対称。極大値と極小値の絶対値が等しい（2 と -2）のはこのため。

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ より $x = -1,\ 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$f(-1) = -1 + 3 = 2 \quad \text{（極大値）}$$

$$f(1) = 1 - 3 = -2 \quad \text{（極小値）}$$

(2) $f(x) = x^3$

【なぜ符号が変わらないか】
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ は $x \neq 0$ で常に正。x^2 は $x = 0$ で 0 になるが正から負には変わらない。
「$f'(0) = 0$ だから $x = 0$ で極値」と判断するのは誤りで、符号変化の確認が必須。

$$f'(x) = 3x^2$$

$f'(x) = 0$ より $x = 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$x = 0$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わらないため、
極値なし。

(3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

【反例の見抜き方】
$-(x-1)^3$ は x^3 を平行移動・上下反転したもの。x^3 が $x=0$ で極値を持たなかったように、$-(x-1)^3$ も $x=1$ で極値を持たない。
式変形 $f(x) = -(x-1)^3$ に気づければ、導関数を計算する前に「極値なし」と予測できる。

$f(x) = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x-1)^3$

$$f'(x) = -3(x-1)^2$$

$f'(x) = 0$ より $x = 1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

符号変化なし。**極値なし**（単調減少）。

統合教材：微分—3 次関数のグラフ概形

統合教材

トピック: 導関数から 3 次関数のグラフを描く難易度: 標準

問題

次の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x) = x^3 - 6x$

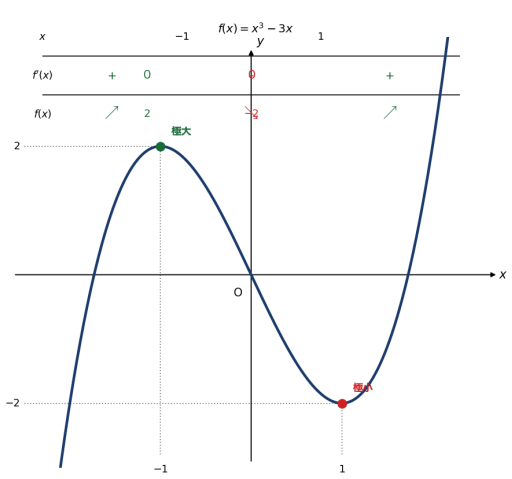
(2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

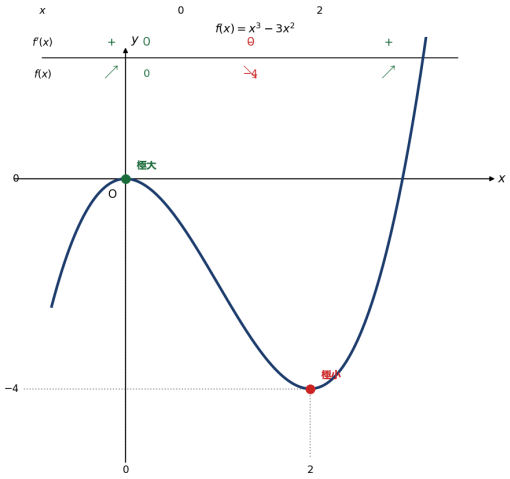
解法の流れ

- 導関数を求め、因数分解する
- $f'(x) = 0$ の解と増減表を完成させる
- 極値・y 切片を計算する
- $x \to \pm\infty$ の挙動（最高次の係数の符号で決まる）を確認する
- 上記の情報をもとにグラフの概形を描く

方針

3 次関数のグラフの形は「増減表 + 極値の座標 + 端点の挙動」だけで決まる。細かい値を無数に計算するのではなく、増減の折り返し点（極値）の座標を正確に求めることが目標。





模範解答

(1) $f(x) = x^3 - 6x$

【$\sqrt{2}$ が出る理由】
$f'(x) = 3(x^2 - 2) = 0$ は $x^2 = 2$、すなわち $x = \pm\sqrt{2}$。
これは $f(x) = x^3 - bx$ の形で $b > 0$ のとき、極値点が $x = \pm\sqrt{b/3}$ になることを示している。b を 6 とすると $\sqrt{6/3} = \sqrt{2}$。

$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

$f'(x) = 0$ より $x = \pm\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \approx 5.66$ （極大値）

$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \approx -5.66$ （極小値）

y 切片: $f(0) = 0$

(2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

【グラフを描く順序】
1．増減表から「上がって → 下がって → 上がる」形と分かる 2．折り返し点 $(0, 0)$、$(1, -1)$ を打つ 3．y 切片は極大点と同じ $(0, 0)$ 4．$x \to \pm\infty$ の挙動で両端を伸ばす
これだけでグラフの概形が完成する。関数値の細かい計算は折り返し点以外では不要。

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$f'(x) = 0$ より $x = 0,\ 1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$f(0) = 0 \quad \text{（極大値）}$$

$$f(1) = 2 - 3 = -1 \quad \text{（極小値）}$$

y 切片: $f(0) = 0$（極大点と一致）
$x \to +\infty$ で $f \to +\infty$、$x \to -\infty$ で $f \to -\infty$
（最高次 $2x^3$ の係数が正）