二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：微分—方程式への応用（実数解の個数）

統合教材

トピック: f(x)=k の実数解の個数（グラフと水平線の交点数）難易度: 標準

問題

次の各方程式の実数解の個数を、定数 k の値の範囲ごとに求めよ。

(1) $x^3 - 3x = k$

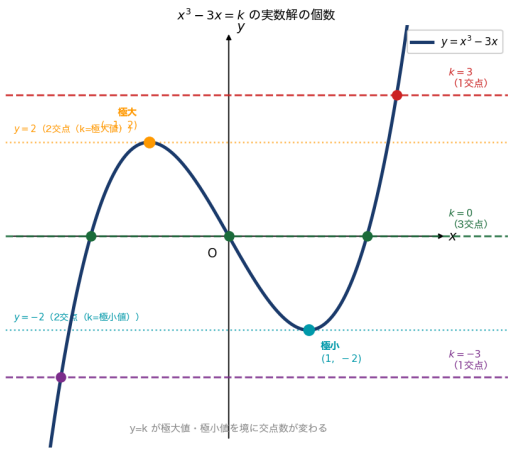
(2) $x^3 - 3x^2 = k$

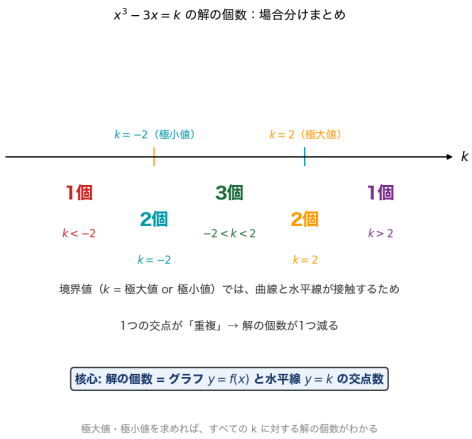
解法の流れ

- $f(x)$ の増減表を作り極大値・極小値を求める
- 実数解の個数 $=$ グラフ $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の交点数
- 極大値・極小値が「交点数が変わる境界値」になる

方針

$f(x) = k$ の実数解の個数は、$y = f(x)$ のグラフを描いて $y = k$ の水平線との交点数を数えることで視覚的に判断できる。増減表で極値を求め、k の境界値（極大値・極小値）で場合分けする。





模範解答

(1) $x^3 - 3x = k$

【境界値で解が「2 個」になる理由】
$k = 2$(極大値)のとき、$y = 2$ は $x = -1$ での曲線と接触する。この接触点は「2 重解」なので、実際の解の個数は 2（= 重複した 1 点 + 別の 1 点)。
$k = -2$（極小値）でも同様に $x = 1$ での接触が生じ、解は 2 個。
等号 $k = \pm 2$ を忘れないこと: 境界値は「解の個数が変わる点」として必ず場合分けに含める。

$f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べる。

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$

実数解の個数:

k **の範囲**	**解の個数**
$k < -2$	1 個
$k = -2$	2 個
$-2 < k < 2$	3 個
$k = 2$	2 個
$k > 2$	1 個

(2) $x^3 - 3x^2 = k$

【極大値が 0 のケースの注意点】
$f(0) = 0$ なので $k = 0$ の境界値は $y = 0$ の水平線に対応する。$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) = 0$ より、解は $x = 0$（2 重解）と $x = 3$。2 重解があるため、「実際の解の個数」は 2 となる。
手順の確認:
1. $f'(x) = 0$ を解いて極値点を特定する 2. 各極値点で $f(x)$ の値（極大値・極小値）を計算する 3. k と極大値・極小値の大小で場合分けする 4. 各 k に対する交点数を数える

$f(x) = x^3 - 3x^2$ の増減を調べる。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -4	$\nearrow$

実数解の個数:

k の範囲	解の個数
$k < -4$	1 個
$k = -4$	2 個
$-4 < k < 0$	3 個
$k = 0$	2 個
$k > 0$	1 個

統合教材：微分—不等式への応用（微分で不等式を示す）

統合教材

トピック: 微分を使った不等式の証明（h(x)=f(x)-g(x) の最小値で判断）難易度: 標準

問題

次の不等式を証明せよ。等号成立条件も述べよ。

(1) $x \geq 0$ のとき $x^3 - 3x + 2 \geq 0$

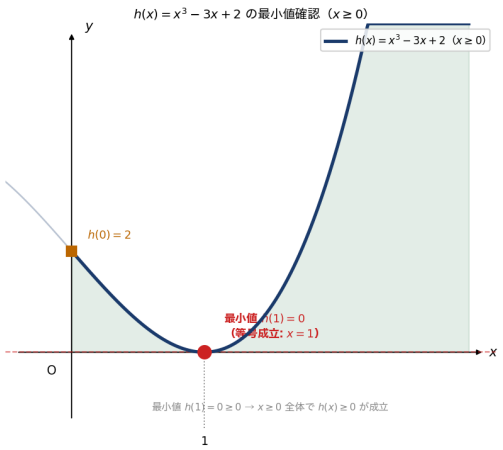
(2) $x \geq 1$ のとき $x^3 \geq 3x - 2$

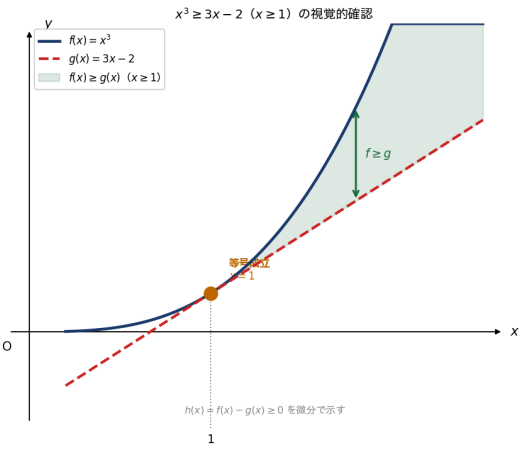
解法の流れ

- 不等式 $f(x) \geq g(x)$ を $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ と同値変換する
- $h'(x) = 0$ を解いて増減表を作る
- 考える範囲での $h(x)$ の最小値 ≥ 0 を確認する
- 等号成立条件（最小値 $= 0$ となる x）を明記する

方針

$h(x) \geq 0$ を示すには「最小値 ≥ 0」で十分。微分で最小値の位置を特定し、実際の最小値が 0 以上であることを計算で確認する。等号成立条件を明記しないと証明として不完全になる。





模範解答

(1) $x \geq 0$ のとき $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ の証明

【証明の構造】
「$h(x) \geq 0$ を示す」というのは「$h(x)$ が常に 0 以上」ということ。
そのためには「最小値 ≥ 0」を確認すれば十分。
$x \geq 0$ での増減表:

- $h(0) = 2 > 0$（端点）
- $h(1) = 0$（最小点）← これが 0 なので $h(x) \geq 0$ が成立

等号成立条件の意味: $h(1) = 0$ から、$x = 1$ のときに左辺 = 右辺になる。「≥ 0」の等号部分は「どこで等しくなるか」を示す。

$h(x) = x^3 - 3x + 2$ とおく。$x \geq 0$ で $h(x) \geq 0$ を示す。

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$x \geq 0$ の範囲で $h'(x) = 0$ の解: $x = 1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

$x \geq 0$ での $h(x)$ の最小値 $= h(1) = 1-3+2 = 0$
よって $x \geq 0$ で $h(x) \geq 0$、すなわち

$$x^3 - 3x + 2 \geq 0$$

等号成立は $x = 1$ のとき。

(2) $x \geq 1$ **のとき** $x^3 \geq 3x - 2$ **の証明**

【範囲によって増減が決まるケース】
(1) と同じ $h(x) = x^3 - 3x + 2$ だが、今回は $x \geq 1$ に限定している。
$x \geq 1$ では $h'(x) = 3(x+1)(x-1) \geq 0$ が常に成立するので、増減表を作らなくても「単調増加」とわかる。
左端点 $x = 1$ が最小値の位置で、
$h(1) = 0 \geq 0 \to$ 証明完了。
なぜ等号成立条件が必要か: 「$x^3 \geq 3x - 2$」は等号が入った不等式。「どこで等しくなるか」を明記しないと証明として不完全。
$x = 1$ のとき $1 = 3 - 2 = 1$ ✓

$h(x) = x^3 - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$ とおく。
$x \geq 1$ で $h(x) \geq 0$ を示す。

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$$

$x \geq 1$ では $x+1 > 0,\ x-1 \geq 0$ より $h'(x) \geq 0$。
よって $h(x)$ は $x \geq 1$ で単調増加。

$$h(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

最小値 $= h(1) = 0$ なので、$x \geq 1$ で $h(x) \geq 0$、
すなわち

$$x^3 \geq 3x - 2$$

等号成立は $x = 1$ のとき。