二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：図形と方程式—軌跡の概念

統合教材

トピック: 動点・軌跡の意味・等距離条件・アポロニウスの円難易度: 標準

問題

次の各問いに答えよ。

(1) 2 点 $\mathrm{A}(0,0)$、$\mathrm{B}(4,0)$ から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

(2) 原点 O からの距離が 3 である点 P の軌跡を求めよ。

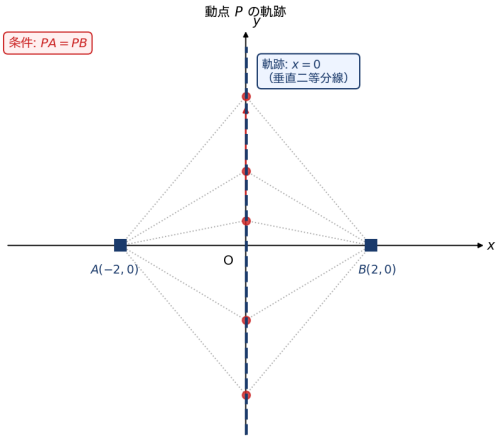
(3) 2 点 $\mathrm{A}(-3,0)$、$\mathrm{B}(3,0)$ に対して $\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=2:1$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。（アポロニウスの円）

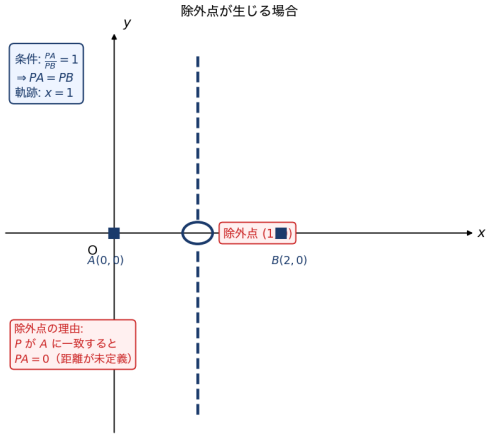
解法の流れ

- 点 $\mathrm{P}(x,y)$ とおき、条件を x,y の方程式に翻訳する
- (1) $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ から出発して両辺を 2 乗し整理する
- (2) $\mathrm{PO}=3$ を 2 乗して $x^2+y^2=9$ を得る
- (3) 比条件 $\mathrm{PA}=2\mathrm{PB}$ を両辺 2 乗して整理し、平方完成で標準形にする

方針

軌跡の問題では、まず動点 $\mathrm{P}(x,y)$ とおき、与えられた条件を座標の等式に変換する。条件式を整理して得られた x,y の方程式が軌跡を表す図形の方程式となる。等距離条件では 2 乗によって根号を消去し、比条件では両辺 2 乗で $\mathrm{PA}^2=k^2\mathrm{PB}^2$ の形にする。最後に平方完成で標準形に変換すれば、軌跡の種類（直線・円など）が分かる。


動点 P の軌跡
条件: $PA = PB$
軌跡: $x = 0$
（垂直二等分線）
y
x
O
$A(-2, 0)$
$B(2, 0)$


除外点が生じる場合
条件: $\frac{PA}{PB} = 1$
$\Rightarrow PA = PB$
軌跡: $x = 1$
y
x
O
$A(0, 0)$
$B(2, 0)$
除外点 (1, 0)
除外点の理由:
P が A に一致すると
$PA = 0$（距離が未定義）

模範解答

(1) 2 点 $\mathrm{A}(0,0)$、$\mathrm{B}(4,0)$ から等距離の点 P の軌跡

【軌跡の問い方】
「条件を満たす点全体の集合」が軌跡である。
条件を座標の式に翻訳し、整理して得られた方程式が軌跡を表す図形の式となる。
【幾何的な意味】
線分 AB の垂直二等分線は、A と B から等距離にある点の集合である。AB の中点は $(2,0)$ であり、AB は x 軸に平行なので垂直二等分線は $x=2$ となる。
【y^2 の消去】
両辺に共通して y^2 があるため、2 乗後に両辺から y^2 が消える。これによって直線の方程式が得られる。

$\mathrm{P}(x,y)$ とおくと条件は：

$$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗：

$$x^2+y^2=(x-4)^2+y^2$$

$$x^2=x^2-8x+16$$

$$8x=16$$

$$x=2$$

軌跡：直線 $x=2$

(2) 原点 O からの距離が 3 の点 P の軌跡

【距離条件が円を生む理由】
「定点からの距離が一定」という条件は、定義から直接円の方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ を与える。
【2 乗による根号の消去】
$\sqrt{\cdot} = k$（$k \geq 0$）を 2 乗すると $\cdot = k^2$ と同値になる（$k \geq 0$ のとき 2 乗は同値変形）。

$\mathrm{P}(x, y)$ とおくと条件は：

$$\mathrm{PO} = 3$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$$

両辺を 2 乗：

$$x^2 + y^2 = 9$$

軌跡：原点を中心とする半径 3 の円

(3) $\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = 2 : 1$ **を満たす点** P **の軌跡**

【アポロニウスの円】
2 定点 A, B に対して $\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = m : n$（$m \neq n$）を満たす点 P の軌跡は円になる。これをアポロニウスの円という。
【比条件の変換】
比 $\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = 2 : 1$ は $\mathrm{PA} = 2\mathrm{PB}$ と同値。両辺 2 乗で根号を消去する。
【平方完成の手順】
$x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$ を用いる。右辺の定数 $25 - 9 = 16 = 4^2$ が半径の 2 乗になる。

$\mathrm{P}(x, y)$ とおくと：

$$\mathrm{PA} = 2\,\mathrm{PB}$$

両辺を 2 乗：

$$\mathrm{PA}^2 = 4\,\mathrm{PB}^2$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 4\left[(x-3)^2 + y^2\right]$$

展開：

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2$$

整理：

$$3x^2 - 30x + 3y^2 + 27 = 0$$

$$x^2 - 10x + y^2 + 9 = 0$$

平方完成：

$$(x-5)^2 - 25 + y^2 + 9 = 0$$

$$(x-5)^2 + y^2 = 16$$

軌跡：中心 $(5, 0)$、半径 4 の円

統合教材：図形と方程式—軌跡の求め方

統合教材

トピック: 媒介変数消去・逆確認（十分条件の検証）難易度: 標準

問題

次の各問いに答えよ。

(1) $x = t + 2$、$y = t^2 - 1$（t は実数）で動く点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(a, 0)$、$\mathrm{B}(0, b)$ が $2a + b = 6$（$a > 0,\ b > 0$）を満たしながら動くとき、線分 AB の中点 M の軌跡を求めよ。

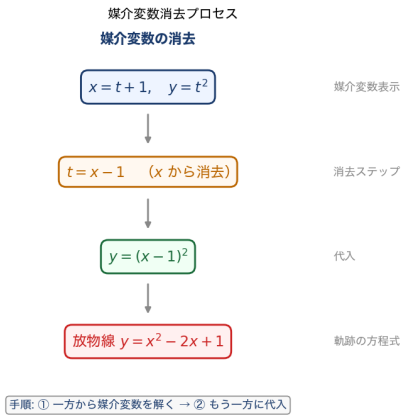
(3) 動点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$（$0 \leq \theta < 2\pi$）の軌跡を求めよ。

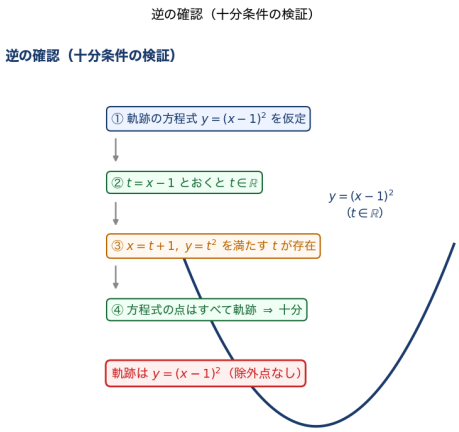
解法の流れ

- 媒介変数（t や θ、または補助変数 a, b）を消去して x, y の関係式を導く
- 媒介変数の範囲から x, y の変域を確認し、除外点がないか調べる
- (1) $t = x - 2$ を代入して y を x の式で表す
- (2) 中点の座標を a, b で表し、条件式に代入して消去する
- (3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を利用して θ を消去する

方針

軌跡の求め方は「媒介変数を消去して x, y の方程式を作る」のが基本である。消去のプロセスには「必要条件の導出」が伴うため、消去後の方程式が実際に軌跡を表しているかを「逆確認（十分条件の検証）」によって確かめる必要がある。媒介変数の定義域から x, y の変域が制限される場合は、除外点も明記する。





模範解答

(1) $x = t + 2$、$y = t^2 - 1$ の軌跡

【媒介変数の消去】
t を x で表して y の式に代入するのが基本手順。
$x = t + 2$ より $t = x - 2$ が一意に定まる（t と x が 1 対 1）。
【変域の確認】
$t \in \mathbb{R}$ のとき $x = t + 2$ も $\mathbb{R}$ 全体を動く。したがって x の範囲に制限はなく、除外点は存在しない。
【頂点の確認】
$y = (x - 2)^2 - 1$ より頂点は $(2, -1)$。
$t = 0$ のとき $(x, y) = (2, -1)$ となり確認できる。

t を消去する：

$$t = x - 2$$

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

$$y = x^2 - 4x + 3$$

t は全実数なので $x = t + 2$ も全実数を動く。
軌跡：放物線 $y = x^2 - 4x + 3$（x は全実数）

(2) 線分 AB の中点 M の軌跡

【補助変数の消去】
a, b は媒介変数ではなく座標値の変数。中点の定義 $x = a/2,\ y = b/2$ を使って a, b を x, y で表し、条件式に代入する。
【変域の制限】
$a > 0$ かつ $b > 0$ という制約が $x > 0$ かつ $y > 0$ に対応する。
軌跡は直線全体ではなく、第 1 象限内の部分（端点を除く）に限られる。
【端点 $(3/2, 0)$ と $(0, 3)$ は含まれないか？】
$a = 0$ または $b = 0$ のとき $a > 0,\ b > 0$ に反するので、端点は含まれない。

中点 $\mathrm{M}(x, y)$ とおくと：

$$x = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{0+b}{2} = \frac{b}{2}$$

したがって：

$$a = 2x, \quad b = 2y$$

条件 $2a + b = 6$ に代入：

$$2(2x) + 2y = 6$$

$$4x + 2y = 6$$

$$2x + y = 3$$

また $a > 0$ より $x > 0$、$b > 0$ より $y > 0$。
軌跡：線分（半開）$2x + y = 3$（$x > 0,\ y > 0$）

(3) $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ **の軌跡**

【三角関数の恒等式の利用】

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

はすべての θ で成り立つ。この恒等式が媒介変数 θ の消去を可能にする。

【除外点がないことの確認】

$0 \leq \theta < 2\pi$ で $(\cos\theta, \sin\theta)$ は単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上のすべての点を 1 回ずつ通る。

したがって、軌跡は単位円全体であり除外点はない。

【逆確認】

$x^2 + y^2 = 1$ を満たす任意の点 (x_0, y_0) に対して、ある $\theta \in [0, 2\pi)$ が存在して $x_0 = \cos\theta,\ y_0 = \sin\theta$ となる。よって十分条件も成り立つ。

$x = \cos\theta$、$y = \sin\theta$ とおくと：

$$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ で $(\cos\theta, \sin\theta)$ は単位円全体を動く。

軌跡：単位円 $x^2 + y^2 = 1$（除外点なし）