二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：図形と方程式—直線の方程式

統合教材

トピック: 傾き切片形・2 点を通る直線・垂直線・一般形難易度: 標準

問題

次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2, 3)$ を通り、傾き -1 の直線

(2) 2 点 $(-1, 4)$, $(3, -2)$ を通る直線

(3) x 軸に垂直で点 $(5, 0)$ を通る直線

解法の流れ

- (1) 点-傾き形 $y - y_1 = m(x - x_1)$ を使う
- (2) 傾き $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ を先に求め、点-傾き形へ
- (3) 垂直線は $x = a$ の形で表され、傾きは定義されない
- 一般形 $ax + by + c = 0$ にまとめると垂直線も統一的に扱える

方針

直線の方程式は「通る点」と「傾き」があれば $y - y_1 = m(x - x_1)$ から導ける。2 点が与えられたときは先に傾きを計算する。x 軸に垂直な直線（$x = a$）は傾きが定義されないため、$y = mx + n$ では表せない。一般形 $ax + by + c = 0$ を使うと、すべての直線を統一的に扱うことができる。

模範解答

(1) 点 $(2, 3)$ を通り傾き -1 の直線

【点-傾き形の使い方】
点 (x_1, y_1) を通り傾き m の直線は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

今回は $x_1 = 2,\ y_1 = 3,\ m = -1$ を代入する。
【検証】
$x = 2$ を代入すると $y = -2 + 5 = 3$ ✓

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 2)$$

$$y - 3 = -x + 2$$

$$y = -x + 5$$

(2) 2 点 $(-1, 4)$, $(3, -2)$ を通る直線

【2 点を通る直線の求め方】
先に傾き m を計算してから点-傾き形を使う。
$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は y の変化量を x の変化量で割ったものである。
【なぜ分数になるか】
2 点の y の差が -6、x の差が 4 なので、x が 1 単位増えると y は $-3/2$ 減る。
【検証】
$x = -1$ を代入すると $y = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$ ✓
$x = 3$ を代入すると $y = -\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = -2$ ✓

$$m = \frac{-2-4}{3-(-1)}$$

$$= \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x - (-1))$$

$$y - 4 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

(3) x 軸に垂直で点 $(5, 0)$ を通る直線

【垂直線 $x = a$】
x 軸に垂直な直線は、x 座標が定数であり続ける点全体の集合である。
傾き $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の分母が 0 になるため、傾きは定義されない。
【一般形での表現】
$x = 5$ は一般形 $1 \cdot x + 0 \cdot y - 5 = 0$ に対応する。一般形はすべての直線を統一的に表せる。

$$x = 5$$

（y は任意の実数）

統合教材：図形と方程式—2 直線の関係

統合教材

トピック: 平行条件・垂直条件・一般形での判定難易度: 標準

問題

次の各問いに答えよ。

(1) 直線 $y = 2x - 3$ と平行で、点 $(1, 4)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(2) 直線 $y = 3x + 1$ に垂直で、点 $(0, -2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(3) 2 直線 $3x - y + 2 = 0$ と $ax + 2y - 5 = 0$ が平行になる定数 a の値を求めよ。

解法の流れ

- 2 直線が平行 $\Leftrightarrow$ 傾きが等しく切片が異なる
- 2 直線が垂直 $\Leftrightarrow$ 傾きの積が -1 （すなわち $m_1 m_2 = -1$）
- 一般形 $ax + by + c = 0$ の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ （$b \neq 0$）
- 平行条件を確認した後、一致でないことも確かめる

方針

2 直線の位置関係は傾きで判定できる。平行は傾きが等しい（ただし同一直線でない）こと、垂直は傾きの積が -1 であることが条件である。一般形が与えられた場合は傾きを読み取り、同じ論理を適用する。一致の場合は平行ではないことに注意せよ。

模範解答

(1) $y = 2x - 3$ **と平行で点** $(1, 4)$ **を通る直線**

【平行条件の意味】
2 直線が平行であるとは、傾きが等しく、かつ同一直線ではないことである。
傾き $m = 2$ は元の直線からそのまま受け継ぐ。切片だけが変化する。
【検証】
$y = 2x - 3$ と $y = 2x + 2$ の傾きはともに 2 で、切片は $-3 \neq 2$ なので平行。
✓

平行条件より傾きは $m = 2$

$$y - 4 = 2(x - 1)$$

$$y - 4 = 2x - 2$$

$$y = 2x + 2$$

(2) $y = 3x + 1$ **に垂直で点** $(0, -2)$ **を通る直線**

【垂直条件の意味】
2 直線の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とすると

$$m_1 m_2 = -1$$

が垂直の条件である。今回 $m_1 = 3$ なので $m_2 = -\dfrac{1}{3}$。
【なぜ積が -1 か】
直交する 2 直線は、一方の傾きを「逆数にして符号を変えた」ものが他方の傾きになる。これはベクトルの内積が 0 になることと等価である。

垂直条件より

$$3 \times m = -1$$

$$m = -\frac{1}{3}$$

$$y - (-2) = -\frac{1}{3}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{3}x - 2$$

(3) $3x - y + 2 = 0$ **と** $ax + 2y - 5 = 0$ **が平行になる** a

【一般形から傾きを読む】
$ax + by + c = 0$（$b \neq 0$）を y について解くと

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

傾きは $-\dfrac{a}{b}$ である。
【一致でないことの確認の重要性】
平行条件は「傾きが等しい」だけでは不十分で、「同一直線でない」ことも確認が必要である。傾きが等しくても切片が同じなら同一直線（平行ではない）となる。

$3x - y + 2 = 0$ の傾き：

$$y = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 3$$

$ax + 2y - 5 = 0$ の傾き：

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{a}{2}$$

平行条件 $m_1 = m_2$：

$$3 = -\frac{a}{2}$$

$$a = -6$$

一致でないことの確認：
$a = -6$ のとき $3x - y + 2 = 0$ の切片 2 と $-6x + 2y - 5 = 0$ すなわち $y = 3x + \dfrac{5}{2}$ の切片 $\dfrac{5}{2}$ は異なる。✓

統合教材：図形と方程式—点と直線の距離

統合教材

トピック: 距離公式 $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 難易度: 標準

問題

次の各問いに答えよ。

(1) 点 $(1, 2)$ と直線 $3x + 4y - 5 = 0$ との距離を求めよ。

(2) 原点と直線 $x + \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ との距離を求めよ。

(3) 点 $(a, 0)$ と直線 $3x - 4y + 5 = 0$ との距離が 3 になる a の値を求めよ。

解法の流れ

- 点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離は $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- (1)(2) は公式に直接代入して計算する
- (3) は距離を a の式で表し、条件 $d = 3$ から a を求める
- 絶対値を外すとき $\pm$ の両方の場合を考える

方針

点と直線の距離公式は、直線の法線方向への正射影の長さを表す。分子の絶対値は点が直線のどちら側にあっても距離が非負になることを保証し、分母は直線の法線ベクトルの長さで正規化している。公式を使うときは直線を必ず一般形 $ax + by + c = 0$ に整理してから代入する。

模範解答

(1) 点 $(1, 2)$ と直線 $3x + 4y - 5 = 0$ との距離

【公式の構造】
点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離：

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

分子：点の座標を直線の左辺に代入した絶対値
分母：直線の係数ベクトル (a, b) の長さ
【なぜ $\sqrt{9+16} = 5$ か】
$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ なので $\sqrt{25} = 5$。
$(3, 4, 5)$ はピタゴラス数である。

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{|3 + 8 - 5|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$= \frac{|6|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{6}{5}$$

(2) 原点と直線 $x+\sqrt{3}\,y-4=0$ との距離

【原点の場合の簡略化】
原点 $(0,0)$ では $ax_0+by_0=0$ なので、分子は $|c|$ となる。

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

【$\sqrt{3}$ の扱い】
$(\sqrt{3})^2 = 3$ であることに注意する。
$\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ と整数になる。

原点は $(0,0)$

$$\begin{aligned} d &= \frac{|1\cdot 0+\sqrt{3}\cdot 0-4|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{|-4|}{\sqrt{1+3}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{4}} \\ &= \frac{4}{2}=2 \end{aligned}$$

(3) 点 $(a, 0)$ と直線 $3x - 4y + 5 = 0$ との距離が 3

【絶対値方程式の解き方】
$|X| = k$（$k > 0$）は $X = k$ または $X = -k$ と同値である。
両方の場合を忘れずに解く。
【検証】
$a = \dfrac{10}{3}$ のとき：

$$\frac{|3 \cdot \frac{10}{3} + 5|}{5} = \frac{|10 + 5|}{5} = \frac{15}{5} = 3 \quad \checkmark$$

$a = -\dfrac{20}{3}$ のとき：

$$\frac{|3 \cdot (-\frac{20}{3}) + 5|}{5} = \frac{|-20 + 5|}{5} = \frac{15}{5} = 3 \quad \checkmark$$

$$d = \frac{|3 \cdot a - 4 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{|3a + 5|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$= \frac{|3a + 5|}{5}$$

条件 $d = 3$：

$$\frac{|3a + 5|}{5} = 3$$

$$|3a + 5| = 15$$

$$3a + 5 = 15 \quad \text{または} \quad 3a + 5 = -15$$

$$a = \frac{10}{3} \quad \text{または} \quad a = -\frac{20}{3}$$