二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

統合教材：図形と方程式—円の方程式

統合教材

トピック: 標準形 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ と一般形から標準形への変換難易度: 標準

問題

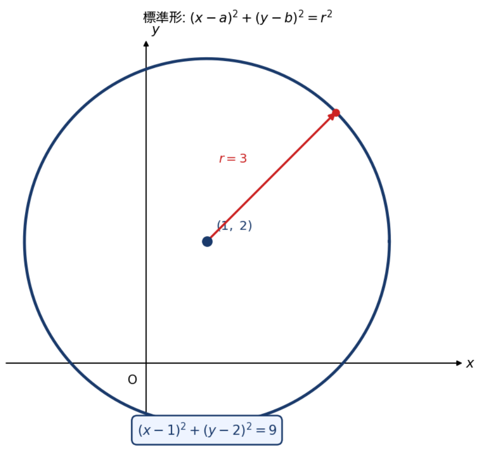
次の各問いに答えよ。
(1) 中心 $(2,-3)$、半径 5 の円の方程式を求めよ。
(2) $x^2+y^2-6x+4y-3=0$ を標準形に変換し、中心と半径を求めよ。
(3) 2 点 A$(1,0)$、B$(5,0)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

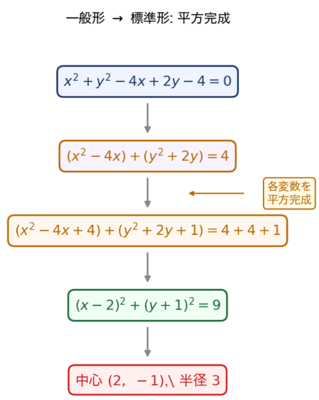
解法の流れ

- (1) 標準形 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ に中心と半径を代入する
- (2) x、y それぞれについて平方完成を行い、標準形に直す
- (3) 直径の両端から中心（中点）と半径を求め、標準形を使う
- 一般形 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ が円を表す条件は $l^2/4+m^2/4-n>0$

方針

円の方程式は「中心 (a,b) からの距離が一定 r」という定義から導かれる。$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ を 2 乗して標準形が得られる。一般形が与えられたときは平方完成によって標準形に変換し、中心と半径を読み取る。直径が与えられたときは中点公式で中心を求め、距離公式で半径を求める。





模範解答

(1) 中心 $(2, -3)$、半径 5 の円

【標準形の構造】
中心 (a, b)、半径 r の円の方程式：

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

符号に注意：中心の y 座標が -3 のとき、$(y-(-3)) = (y+3)$ となる。
【展開形との関係】
標準形を展開すると一般形が得られる。逆に一般形から標準形に戻すには平方完成が必要である。

$$(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 5^2$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

(2) $x^2+y^2-6x+4y-3=0$ **の標準形**

【平方完成の手順】
x^2+px の形に対して

$$x^2+px=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$$

を使う。x^2-6x では $p=-6$ なので $(x-3)^2-9$ となる。
【符号の確認】
y^2+4y では $p=4$ なので $(y+2)^2-4$ となる。
平方完成で生じる定数を移項すると右辺が $9+4+3=16=4^2$ となる。

x について平方完成：

$$x^2-6x=(x-3)^2-9$$

y について平方完成：

$$y^2+4y=(y+2)^2-4$$

代入して整理：

$$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4-3=0$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=16$$

中心 $(3,-2)$、半径 4

(3) 2点 $\mathrm{A}(1,0)$、$\mathrm{B}(5,0)$ を直径の両端とする円

【直径から円を求める方法】
直径の両端 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$、$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ が与えられたとき：

- 中心 = AB の中点
- 半径 = AB の長さの半分

【別解：直径の端点を使う公式】
点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直径 AB 上の半円に乗るとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = 0$$

が成り立ち、$(x-1)(x-5) + y^2 = 0$ から同じ結果を導ける。

中心（AB の中点）：

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3, 0)$$

半径（中心から A までの距離）：

$$r = \sqrt{(3-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

円の方程式：

$$(x-3)^2 + y^2 = 4$$

統合教材：図形と方程式—円と直線

統合教材

トピック: 3 つの位置関係（$d > r$, $d = r$, $d < r$）と弦の長さ難易度: 標準

問題

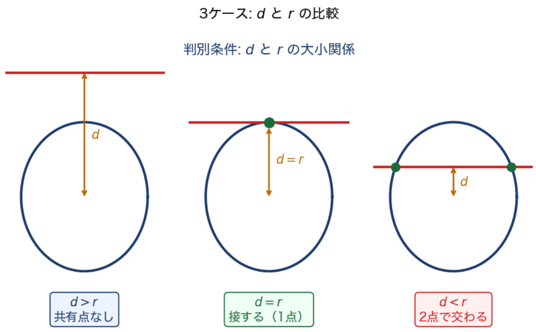
次の各問いに答えよ。
(1) 円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $3x - 4y - 5 = 0$ の位置関係を調べよ。
(2) 円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x + k$ が接するとき、定数 k の値を求めよ。
(3) 円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $x + 2y - 5 = 0$ の交点がつくる弦の長さを求めよ。

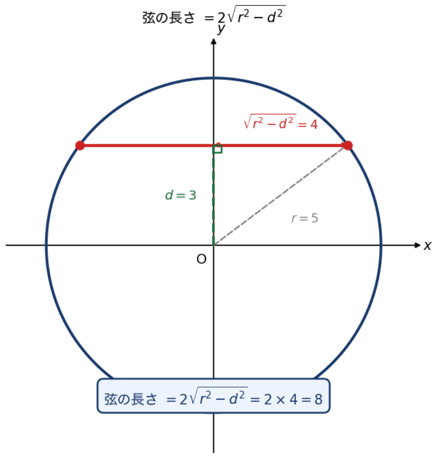
解法の流れ

- 円の中心から直線への距離 d と半径 r を比較する
- $d > r$：共有点なし（交わらない）
- $d = r$：共有点 1 つ（接する）
- $d < r$：共有点 2 つ（交わる）
- 弦の長さは $2\sqrt{r^2 - d^2}$ で求める

方針

円と直線の位置関係は、円の中心から直線への距離 d と半径 r の大小関係で完全に決まる。点と直線の距離公式 $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を用いて d を計算し、r と比較する。弦の長さを求めるときは、中心から弦への垂線が弦を二等分することを利用し、三平方の定理を適用する。


3ケース: d と r の比較
判別条件: d と r の大小関係
d
$d = r$
d
$d > r$
共有点なし
$d = r$
接する（1点）
$d < r$
2点で交わる


弦の長さ $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$
y
$\sqrt{r^2 - d^2} = 4$
$d = 3$
$r = 5$
O
x
弦の長さ $= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2 \times 4 = 8$

統合教材

模範解答

(1) 円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $3x - 4y - 5 = 0$ の位置関係

円の中心 $(0, 0)$、半径 $r = 5$
中心から直線への距離：

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

$d = 1 < r = 5$ なので、円と直線は **2 点で交わる**。

【位置関係の判定法】
d と r の大小を比べるだけで位置関係が決まる。

条件	位置関係
$d > r$	交わらない
$d = r$	接する
$d < r$	2 点で交わる

【なぜこれで分かるか】
中心から直線までの最短距離が d なので、$d < r$ ならば直線は円の内部を通過し、2 点で境界（円周）と交わる。

(2) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=x+k$ が接する k

【接線条件】
接するとは $d=r$（共有点がちょうど 1 つ）であることである。
絶対値を外すとき $\pm$ の両方を考える。
【k の符号の意味】
$k>0$ のとき直線は上方に平行移動し、$k<0$ のとき下方に平行移動する。
どちらの場合も円に接することが分かる。
【別解：判別式を使う方法】
$y=x+k$ を $x^2+y^2=5$ に代入すると $2x^2+2kx+k^2-5=0$。接線条件は判別式 $D=0$：$4k^2-8(k^2-5)=0$ から同じ結果を得る。

直線を一般形に変形：

$$x-y+k=0$$

円の中心 $(0,0)$、半径 $r=\sqrt{5}$
中心から直線への距離：

$$d=\frac{|1\cdot 0-1\cdot 0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

接線条件 $d=r$：

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$$

$$|k|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$$

$$k=\sqrt{10}\quad \text{または}\quad k=-\sqrt{10}$$

(3) 円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $x + 2y - 5 = 0$ の弦の長さ

【弦の長さの公式】
中心から弦への垂線は弦を二等分するので、直角三角形が生じる。三平方の定理より

$$\text{半弦長} = \sqrt{r^2 - d^2}$$

したがって弦の長さは $2\sqrt{r^2 - d^2}$。
【$\sqrt{5}$ の簡略化】

$$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

【$2\sqrt{20}$ の簡略化】

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

よって $2\sqrt{20} = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$。

円の中心 $(0, 0)$、半径 $r = 5$
中心から直線への距離：

$$d = \frac{|0 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

弦の長さ l：

$$l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

$$= 2\sqrt{25 - 5}$$

$$= 2\sqrt{20}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

統合教材：図形と方程式—接線の方程式

統合教材

トピック: 接点からの接線と外点からの接線難易度: 標準

問題

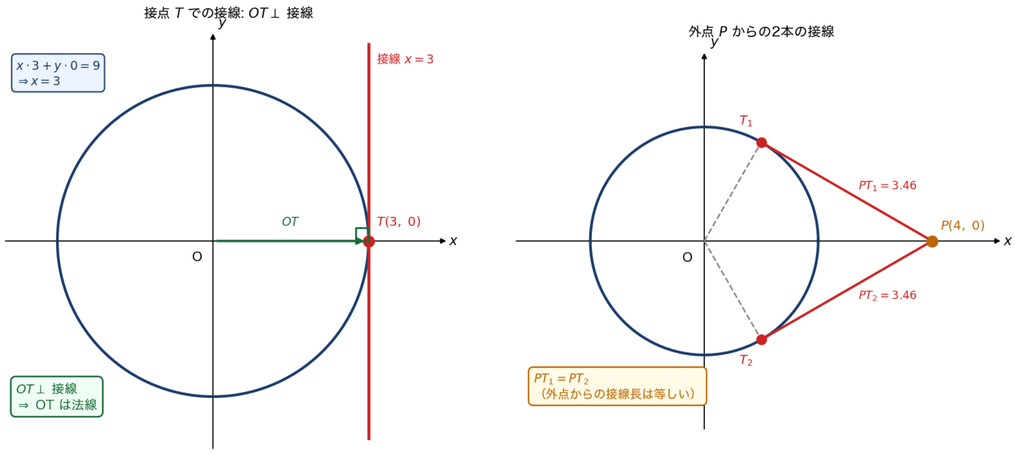
次の各問いに答えよ。
(1) 円 $x^2+y^2=10$ の点 $(1,3)$ における接線の方程式を求めよ。
(2) 円 $x^2+y^2=5$ に外点 $(3,1)$ から引いた接線の方程式をすべて求めよ。
(3) 円 $x^2+y^2=4$ に外点 $(4,0)$ から引いた接線の方程式をすべて求めよ。

解法の流れ

- 接点 (x_1,y_1) における接線：$x_1x+y_1y=r^2$（接点の公式）
- 外点から引く接線：接線を $y-y_0=m(x-x_0)$ とおき、中心からの距離 $=r$ の条件を立てる
- 外点から引く接線は一般に 2 本あるが、傾き m を未知数とした方程式が解をもたない場合は垂直線 $x=x_0$ を別途確認する

方針

接点が分かっている場合は、円と半径の直交性から接線の方程式を即座に書ける。外点からの接線は「直線が円に接する条件（距離 $=$ 半径）」を使って傾きを決定する。外点が x 軸上にある場合など、垂直な接線が存在する可能性があるため、傾きを文字でおく前に垂直線の場合を確認する習慣をもつ。



模範解答

(1) 円 $x^2+y^2=10$ の点 $(1,3)$ における接線

【接点における接線の公式】
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_1,y_1) における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

これは「x^2 を x_1x に、y^2 を y_1y に」置き換える形になっている。

【なぜこの公式が成り立つか】
接点で接線は半径と垂直である。中心 $(0,0)$ から接点 $(1,3)$ へのベクトルは $(1,3)$。接線の法線ベクトルもこれに一致するため、方程式は $1(x-1)+3(y-3)=0$、すなわち $x+3y=10$ となる。

点 $(1,3)$ が円上にあることの確認：

$$1^2+3^2=1+9=10 \quad \checkmark$$

接点 $(x_1,y_1)=(1,3)$ における接線：

$$1\cdot x+3\cdot y=10$$

$$x+3y=10$$

(2) 円 $x^2 + y^2 = 5$ に外点 $(3,1)$ からの接線

【外点から引く接線の求め方】
傾き m を未知数とおき、点 $(3,1)$ を通る直線を一般形に書く。中心からの距離が半径に等しいという条件を立て、m について解く。
【両辺 2 乗の注意点】
両辺が非負のとき 2 乗しても同値。ここでは両辺とも非負なので問題ない。
【垂直線の確認】
$x = 3$ の場合：中心 $(0,0)$ からの距離は 3、半径 $\sqrt{5} \approx 2.24$ と異なるので接しない。傾き m でおく方法で十分。

接線を $y - 1 = m(x - 3)$ とおく：

$$mx - y - 3m + 1 = 0$$

中心 $(0,0)$ から接線への距離 $= \sqrt{5}$：

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 - 3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|-3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

両辺を 2 乗：

$$(-3m + 1)^2 = 5(m^2 + 1)$$

$$9m^2 - 6m + 1 = 5m^2 + 5$$

$$4m^2 - 6m - 4 = 0$$

$$2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$(2m + 1)(m - 2) = 0$$

$$m = -\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad m = 2$$

接線の方程式：

$$y = 2x - 5 \quad \text{または} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

(3) 円 $x^2 + y^2 = 4$ に外点 $(4, 0)$ からの接線

【x 軸上の外点の特徴】
外点 $(4, 0)$ が x 軸上にあるため、2 本の接線は x 軸に関して対称になる。傾きが $\pm m$ の形になることが予想できる。
【有理化】

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

分母を有理化して答えを整理する。
【検証：接点が円上にあるか】
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$ を $x^2 + y^2 = 4$ に代入すると判別式 $D = 0$ が確認でき、接することが保証される。

接線を $y - 0 = m(x - 4)$ とおく：

$$mx - y - 4m = 0$$

中心 $(0, 0)$ からの距離 $= 2$：

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 - 4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

$$\frac{|-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

$$\frac{4|m|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

両辺を 2 乗：

$$\frac{16m^2}{m^2+1} = 4$$

$$16m^2 = 4(m^2+1)$$

$$16m^2 = 4m^2 + 4$$

$$12m^2 = 4$$

$$m^2 = \frac{1}{3}$$

$$m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$